التطبيقات الفيزيائية :

* سلاح الفيزيائي هو الزمن (ن)

ملاحظات هامة :

ف : المسافة المقطوعة خلال زمن قدرة ن
ع : السرعة اللحظية خلال زمن قدرة ن = فَ
ت : التسارع اللحظي خلال زمن قدرة ن = عَ = فً

المسافة والزمن موجبان دائماً أما السرعة والتسارع والإزاحة موجب أو سالب

* انعدام السرعة (سكن الجسيم لحظياً) (توقف) ع = ٠
* انعدام التسارع ت = ٠
* عندما يصل الجسيم للأرض ف = ٠

*انطلق جسيم من السكون : $ع|_{ن=٠} = ٠$

*انطلق جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها أ : $ع|_{ن=٠} = أ$

* وصل الجسيم لأقصى ارتفاع : $ف|_{ع=٠}$

* زمن الصعود = زمن الهبوط
* سرعة الهبوط سالب
* تسارع هابط موجب ، تسارع صاعد سالب

* الجسيم اللي يطلع أول أو يوصل متأخر يكون معه الفارق الزمني (ن + الفارق)

قذف من برج : أ : ارتفاع البرج	أسقط من برج : (قذف من تحت الأرض) :
$ف_{برج}$ = معطى بالسؤال	$ف_{برج}$ = معطى بالسؤال
$ف_{أرض}$ = المعطى + أ	$ف_{أرض}$ = أ – المعطى

١) يتحرك جسيم في خط مستقيم ، فإذا كانت المسافة المقطوعة في زمن قدرة (ن) تعطى بالعلاقة :
ف(ن) = ن^{٣} - ٩ن^{٢} +٢٤ن ، أوجد :
(أ) السرعة اللحظية
(ب) التسارع اللحظي
(ج) السرعة عندما ن = ٣
(د) التسارع عندما ن = ٣
(هـ) السرعة عند انعدام التسارع

الحل : (أ) ع = ٣ن^{٢} - ١٨ن + ٢٤

(ب) ت = ٦ن - ١٨

(ج) ع(٣) = (٣×٩) – (١٨×٣) + ٢٤ = -٣ م/ث

(د) ت(٣) = (٦×٣) – ١٨ = ٠

(هـ) ٦ن – ١٨ = ٠ ⟵ ٦ن = ١٨ ⟵ ن = ٣

∴ ينعدم التسارع عندما ن = ٣

ع(٣) = ٢٧ – ٥٤ + ٢٤ = -٣ م/ث

٢) يتحرك جسم في خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية
ف(ن) = ٦ن^{٢} - $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} ، حيث ف المسافة المقطوعة بالأقدام بعد ن ثانية ، جد ما يلي :
(أ) سرعة الجسم عندما ن = ٥ ثواني
(ب) تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته

الحل : (أ) ع(ن) = ١٢ن – ن^{٢}
ع(٥) = ١٢×٥ – ٢٥ = ٣٥ قدم/ث

(ب) ١٢ن – ن^{٢} = ٠ ⟵ ن(١٢ – ن) = ٠
ن = ٠ ، ن = ١٢
ت = عَ(ن) = ١٢ – ٢ن
ت(٠) = ١٢ قدم/ث^{٢} ، ت(١٢) = -١٢ قدم/ث^{٢}

٣) ف(ن) = ن^{٣}- ٧ن^{٢}+ ٩ن + ١ ، أوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ١م/ث :

الحل : ع(ن) = ٣ن^{٢}- ١٤ن+ ٩ = ١

٣ن^{٢}- ١٤ن + ٨ = ٠ ⟵ (٣ن – ٢)(ن – ٤) = ٠

ن = ٤ ، ن = $\frac{٢}{٣}$

∴ ت = ٦ن – ١٤

ت(٤) = ١٠ م/ث^{٢} ، ت($\frac{٢}{٣}$) = -١٠ م/ث^{٢}

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} - ١٥ن + ١٠٠ حيث ف(ن) المسافة بالأمتار ، ن بالزمن بالثواني ،عندما تكون سرعة الجسيم ٣٠م/ث احسب :

أ) تسارع الجسيم

ب) المسافة التي قطعها الجسيم

الحل : ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} - ١٥ن + ١٠٠

ع = ٣ن^{٢} - ٦ن – ١٥

ت = ٦ن – ٦

أ) ٣ن^{٢} - ٦ن - ١٥ = ٣٠ ⟵ ٣ن^{٢} - ٦ن -٤٥ = ٠

ن^{٢} - ٢ن – ١٥ = ٠

(ن – ٥)(ن + ٣) = ٠

ن = ٥ مقبولة ، ن $\cancel{=}$ -٣ مرفوضة

ت(٥) = ٦×٥ – ٦ = ٣٠ – ٦ = ٢٤ م/ث^{٢}

ب) ف(٥) = (٥)^{٣} - ٣(٥)^{٢} - ١٥(٥) + ١٠٠

= ١٢٥ – ٧٥ – ٧٥ + ١٠٠

= ١٢٥ – ١٥٠ + ١٠٠

ف(٥) = ٧٥ متر

٥) يتحرك جسيم في خط مستقيم فيقطع مسافة قدرها ف متراً في زمن قدرة ن ثانية، حيث ف(ن) = ٢ن^{٣} - ١٧ن^{٢} + ٤٤ن + ١٠ ، جد التسارع عندما ف(ن) = ٤٦م

الحل : ف(ن) = ٢ن^{٣} - ١٧ن^{٢} + ٤٤ن + ١٠

ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٣٤ن + ٤٤

ت(ن) = ١٢ن – ٣٤

ف = ٤٦ ⟵ ٢ن^{٣} - ١٧ن^{٢} + ٤٤ن + ١٠ = ٤٦

٢ن^{٣} - ١٧ن^{٢} + ٤٤ن - ٣٦ = ٠ $\boxed{\text{ن = ٢ ⟵ ف = ٠}}$

	ن^{٣}	ن^{٢}	ن	الحد الثابت
	٢	-١٧	٤٤	-٣٦
$\boxed{٢}$		٤	-٢٦	٣٦
	٢	-١٣	١٨	٠

(ن – ٢)(٢ن^{٢} - ١٣ن + ١٨) = ٠

(ن – ٢)(٢ن – ٩)(ن – ٢) = ٠

ن = ٢ ، ٢ ، ٤,٥

ت: ن = ٢ ⟵ ٢٤ – ٣٤ = -١٠ م/ث^{٢}

ن = $\frac{٩}{٢}$ ⟵ ١٢× $\frac{٩}{٢}$ - ٣٤ = ٢٠ م/ث^{٢}

٦) قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض ، بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف(ن) = ٣٠ن – ٥ ن^{٢} ، جد كلاً مما يأتي :

أ) السرعة الابتدائية للجسم

ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الحسم

ج) اللحظة التي تكون عندها سرعة الجسم ١٠م/ث

د) الزمن اللازم حتى يعود الجسم إلى سطح الأرض

الحل : أ) السرعة الابتدائية (ع.) للجسم هي السرعة التي قذف بها الجسم أي عندما (ن = ٠)

ع(ن) = ٣٠ – ١٠ن ، ومنه ع. = ٣٠م/ث

ب) يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع عندما تصبح السرعة ع = ٠ ، أي أن ٣٠ – ١٠ن = ٠ ويتحقق ذلك عندما ن = ٣ث ، وعند هذه اللحظة تكون المسافة المقطوعة ف(٣) = ٩٠ – ٤٥ = ٤٥م

ج) ع = ٣٠ – ١٠ن = ١٠ ، ومنه ن = ٢ ثانية

د) عندما يعود الجسم إلى سطح الأرض تكون ف = ٠ ، ومنه ٣٠ن – ٥ن^{٢} = ٠

ن(٣٠ – ٥ن) = ٠ ، ومنه ن = ٠ ، ن = ٦ ثانية

وبما أن ن = ٠ هي لحظة الانطلاق ، إذا يعود الجسم إلى سطح الأرض بعد ٦ ثوانٍ من بدأ الحركة

٧) قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على ارتفاع ٦٠ متراً من سطح الأرض وفق العلاقة ف(ن) = ٤٠ن – ٥ن^{٢} حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتار ، جد كلاً مما يأتي :

أ) الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى نقطة القذف

ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض

ج) متى تصبح سرعة الجسم ٣٠م/ث

د) متى يصبح ارتفاع الجسم ١٣٥ متراً عن سطح الأرض

الحل :

ف$_{\text{برج}}$ = ٤٠ن – ٥ن^{٢}

ف$_{\text{أرض}}$ = ٤٠ن – ٥ن^{٢} + ٦٠

ع = ٤٠ – ١٠ ن

ت = - ١٠

أ) ف$_{\text{برج}}$ = ٠ ⟵ ٤٠ن – ٥ن^{٢} = ٠

ن(٤٠ – ٥ن) = ٠ ⟵ ن $\cancel{=}$ ٠ مرفوضة

⟵ ن = ٨ ✓

ب) ف$_{\text{أرض}}$ = ١٦٠ – ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠ متر

ع = ٠ ⟵ ٤٠ – ١٠ن = ٠ ⟵ ن = ٤

جـ) ع = ٣٠ ⟵ ٤٠ن – ١٠ن = ٣٠

-١٠ن = -١٠ ⟵ **[ن = ١ ثانية]**

ء) ف$_{أرض}$ = ١٣٥ ⟵ ٤٠ن – ٥ن^{٢} + ٦٠ = ١٣٥

٥ن^{٢} - ٤٠ن + ٧٥ = ٠ ⟵ ن^{٢} - ٨ن + ١٥ = ٠

(ن – ٥)(ن – ٣) = ٠ ⟵ **[ن = ٥ ثانية ، ن = ٣ ثانية]**

---

٨) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى من سطح بناية حسب العلاقة ف(ن) = ١٠ن – ٥ن^{٢} احسب ارتفاع البناية علماً بأن أقصى ارتفاع للجسيم عن سطح الأرض = ١٠م

الحل :

ف$_{بناية}$ = ١٠ن – ٥ن^{٢}
ف$_{أرض}$ = ١٠ن – ٥ن^{٢} + ل
ع = ١٠ – ١٠ ن

ف$_{أرض}$ | = ١٠

ع = ٠ ⟵ ١٠ – ١٠ن = ٠ ⟵ **[ن = ١]**

١٠ – ٥ + ل = ١٠ ⟵ **[ل = ٥م]**

---

٩) قذف جسم من سطح برج رأسياً إلى أعلى حيث ارتفاعه بالأمتار عن سطح البرج بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف(ن) = ٢٥ن – ٥ن^{٢} جد ارتفاع البرج إذا كانت سرعة الجسيم لحظة وصولة الأرض تساوي (-٥٥ م/ث) :

الحل :

ف$_{برج}$ = ٢٥ن – ٥ن^{٢}
ف$_{أرض}$ = ٢٥ن – ٥ن^{٢} + ل
ع = ٢٥ – ١٠ ن

ع |$_{ف\ أرض = ٠}$ = -٥٥

* ٢٥ – ١٠ن = -٥٥ ⟵ -١٠ن = -٨٠ ⟵ **[ن = ٨ ثانية]**

* ٢٥×٨ – ٥×٦٤ + ل = ٠

٢٠٠ – ٣٢٠ + ل ⟵ **[ل = ١٢٠ متر]**

---

١٠) قذف جسيم رأسياً للأعلى من قمة برج حسب العلاقة ف(ن) = ٤٨ن – ٦ن^{٢} جد ارتفاع البرج علماً بأن سرعة الجسيم لحظة وصولة الأرض هي ٦٠م/ث :

الحل :

---

١١) قذف جسم رأسياً للأعلى حسب العلاقة ف(ن) = من - ٥ن^{٢} ، جد قيمة م علماً بأن أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم هو ٤٥م :

الحل : ف = من - ٥ن^{٢} ، ع = م – ١٠ن

ف |$_{ع = ٠}$ = ٤٥ ⟵ م - ١٠ن = ٠ ⟵ م = ١٠ن

من - ٥ن^{٢} = ٤٥ ⟵ ١٠ن^{٢} - ٥ن^{٢} = ٤٥

٥ن^{٢} = ٤٥ ⟵ ن^{٢} = ٩ ⟵ ن = ٣ ، ~~ن = -٣~~

[∴ م = ٣٠]

---

١٢) يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٥ م/ث حسب العلاقة ف(ن) = من^{٢} + ب ن ، حيث م ، ب ثوابت ، احسب المسافة التي يقطعها الجسم عندما ن = ٢ ، علماً بأن تسارع الجسم = ١٢ م/ث^{٢} :

الحل :

ع = ٢من + ب ⟵ ع(٠) = ٠ + ب = ٥ ⟵ ب = ٥

ت = ٢م = ١٢ ⟵ م = ٦ ⟵ ف = ٦ن^{٢} + ٥ن

ف(٢) = ٦×٤ + ٥×٢ = ٣٤م

١٣) قذف جسيم رأسياً للأعلى من سطح وكان ارتفاع الجسيم عن سطح الأرض يعطى بالعلاقة ف(ن) = ع. ن - ٥ن^{٢} ، إذا كانت سرعة هبوط الجسم بعد ٦ ث تساوي نصف سرعته الابتدائية ، جد أقصى ارتفاع وصل إلية الجسم :

الحل :

١٤) يتحرك جسيم حسب العلاقة ع = م√ف فإذا كان تسارعه يساوي ٨ م/ث^{٢} فجد قيم م حيث م > ٠ ، ف > ٠ :

الحل : ت = (م × ع) / (٢√ف) = (م × م√ف) / (٢√ف) = ٨

م^{٢} = ١٦ ⟵ م = ٤ ، ~~-٤~~ مرفوضة

١٥) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته ع تعطى بالعلاقة ع(ن) = ن / ف(ن) حيث ف المسافة بالأمتار و ن الزمن بالثواني احسب تسارع الجسيم عندما ن = ٣ علماً بأن سرعته عندئذ تساوي ١/٢ م/ث :

الحل : ت = عَ(ن) = (ف(ن) - ن فَ(ن)) / ف^{٢}(ن) = (ف(ن) - ن ع) / ف^{٢}(ن)

لكن ع(٣) = ٣ / ف(٣) = ١/٢ ⟵ ف(٣) = ٦

∴ ت = (٦ - ٣ × ١/٢) / ٣٦ = ١/٨ م/ث^{٢}

١٦) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ع^{٢} = ١ – ٢ف^{٢} حيث ع السرعة ، ف المسافة بالأمتار . جد تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته :

الحل :

١٧) ف(ن) = ١/٤ (ن + ٢)^{٤} - ٦ن^{٢} جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث :

الحل: ع = (ن + ٢)^{٣} - ١٢ن = ٨٩

ن^{٣} + ٦ن^{٢} + ١٢ ن + ٨ – ١٢ن = ٨٩

ن^{٣} + ٦ن^{٢} - ٨١ = ٠

⟸ عوامل الحد المطلق ن = ٣ / نقسم على ن – ٣

(ن – ٣)(ن^{٢} + ٩ن + ٢٧) = ٠

ن = ٣ ، ليس لها حل حقيقي

ت = ٣(ن + ٢)^{٢} - ١٢

ت(٣) = ٣×٢٥ – ١٢ = ٦٣ م/ث^{٢}

١٨) أسقط جسم من ارتفاع ٢٠٠م عن سطح الأرض بحيث كانت المسافة بالأمتار التي يقطعها في ن ثانية هي ف = ٥ن^{٢} جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ١٢٠م عن سطح الأرض :

الحل :

ف$_{بناية}$ = ٥ن^{٢}
ف$_{أرض}$ = ٢٠٠ – ٥ن^{٢}
ع = ١٠ ن
ت = ١٠

ع |$_{ف أرض = ١٢٠}$ = ١٠ × ٤ = ٤٠م/ث (للأسفل)

* ٢٠٠ – ٥ن^{٢} = ١٢٠ ⟵ -٥ن^{٢} = -٨٠

ن^{٢} = ١٦ ⟵ ن = ٤ ، ~~ن = -٤~~

١٩) من نقطة على عمق (٥٥) متر عن سطح الأرض قذف جسيم رأسياً للأعلى بحيث أن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية $ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢}$ جد سرعة الجسيم لحظة وصولة الأرض :

الحل :

$$\boxed{\begin{array}{l} ف = ٦٠ن - ٥ن^{٢} \\ ف_{أرض} = ٥٥ - ٦٠ن + ٥ن^{٢} \\ ع = ٦٠ - ١٠ن \end{array}}$$

ع: $ن = ١ \longrightarrow ٦٠ - ١٠ = ٥٠$ م/ث

$ن = ١١ \longrightarrow ٦٠ - ١١٠ = -٥٠$ م/ث

$ف_{أرض} = ٠ \longrightarrow ٥ن^{٢} - ٦٠ن + ٥٥ = ٠ \longrightarrow ن^{٢} - ١٢ن + ١١ = ٠$

$(ن - ١١)(ن - ١) = ٠ \longrightarrow \boxed{ن = ١ ، ١١}$

٢٠) قذف جسيم رأسياً للأعلى حسب العلاقة $ف(ن) = ٨٠ن - ١٠ن^{٢}$ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، وبعد أربع ثوان قذف جسيم آخر رأسياً للأعلى وفق العلاقة ذاتها ، جد الارتفاع الذي يلتقي عنده الجسمان :

الحل :

$ف = ٨٠(ن + ٤) - ١٠(ن + ٤)^{٢}$ ، $ع = ٨٠ - ٢٠(ن + ٤)$ | $ف = ٨٠ن - ١٠ن^{٢}$ ، $ع = ٨٠ - ٢٠ن$

$ف_{١} = ف_{٢}$

$\cancel{٨٠ن} + ٣٢٠ - ١٠(ن^{٢} + ٨ن + ١٦) = \cancel{٨٠ن} - ١٠ن^{٢}$

$٣٢٠ - \cancel{١٠ن^{٢}} - ٨٠ن - ١٦٠ = \cancel{-١٠ن^{٢}}$

$١٦٠ = ٨٠ن \longrightarrow \boxed{ن = ٢}$

$ع_{١} = ٨٠ - ٢٠ \times ٦ = ٨٠ - ١٢٠ = -٤٠$ م/ث هابط | $ع_{٢} = ٨٠ - ٢٠ \times ٢ = ٨٠ - ٤٠ = ٤٠$ م/ث صاعد

٢١) سقط جسيم من بناية ارتفاعها ٦٠م ، حسب العلاقة $ف(ن) = ٤ن^{٢}$ ، وبعد ثانية واحدة من سقوط الجسيم قذف جسم آخر من الأرض رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة $ف(ن) = ٢٠ن - ٤ن^{٢}$ ، جد سرعة الجسمين عند تلاقيها :

الحل :

$ف = ٦٠ - ٤(ن + ١)^{٢}$ ، $ع = ٨(ن + ١)$ | $ف = ٢٠ن - ٤ن^{٢}$ ، $ع = ٢٠ - ٨ن$

$ف_{١} = ف_{٢}$

$٦٠ - ٤(ن^{٢} + ٢ن + ١) = ٢٠ن - ٤ن^{٢}$

$٦٠ - \cancel{٤ن^{٢}} - ٨ن - ٤ = ٢٠ن - \cancel{٤ن^{٢}}$

$٢٨ن = ٥٦ \longrightarrow \boxed{ن = ٢}$

$ع_{١} = ٨ \times ٣ = ٢٤$ م/ث للأسفل | $ع_{٢} = ٢٠ - ١٦ = ٤٠$م/ث

٢٢) أسقط جسم من ارتفاع ١٢٠م عن سطح الأرض سقوطاً حراً ، حيث إن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية هي $ف_{١}(ن) = ٥ن^{٢}$ وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للأعلى حيث إن المسافة التي يقطعها هي $ف_{٢}(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢}$ ، جد اللحظة التي يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض :

الحل :

٢٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة : $ف(ن) = جا(ن) + جتا(ن)$ ، $ن \in [٠ ، \pi]$ جد المسافة والتسارع عند السكون اللحظي :

الحل : $ف(ن) = جان + جتان$ ، $ع = جتان - جان$

$ت = -جا ن - جتا ن$

$ع = ٠ \longrightarrow جتان - جان = ٠ \longrightarrow جتان = جان$

$ظا ن = ١ \longrightarrow ن = \frac{\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٤}$

$ف = جا\frac{\pi}{٤} + جتا\frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

$= جا(\frac{٥\pi}{٤}) + جتا(\frac{٥\pi}{٤}) = \frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \cancel{\frac{-٢}{\sqrt{٢}}}$

$ت = -جا\frac{\pi}{٤} - جتا\frac{\pi}{٤} = \frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

$= -جا(\frac{٥\pi}{٤}) - جتا(\frac{٥\pi}{٤}) = \sqrt{٢}$

٢٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة

ف(ن) = ٢جا^2(ن/٢) + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ن ، ن ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] حيث ف : المسافة بالأمتار ، ن : الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{٣}$ م/ث :

الحل :

$\boxed{\begin{array}{l} ف(ن) = ٢جا^2(\frac{ن}{٢}) + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ن \\ ع = جا(ن) + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ ت = جتا(ن) \end{array}}$

$ت \Big|_{ع=\sqrt{٣}} = جتا(\frac{\pi}{٣}) = \frac{١}{٢}$ م/ث^2

$جا(ن) + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣} \longrightarrow جا(ن) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\boxed{ن = \frac{\pi}{٣}}$ ثانية

٢٥) يتحرك جسيم وفق العلاقة الزمنية :

ف(ن) = ن^3 - ٦ن^2 + ٩ن + ١٥ جد متى يكون :

ا) التسارع موجب ومتى يكون سالب

ب) السرعة موجبة ومتى تكون سالبة

الحل : ع = ٣ن^2 - ١٢ن + ٩

ت = ٦ن - ١٢

ا) ت = ٠ ⟵ ٦ن - ١٢ = ٠ ⟵ ٦ن = ١٢ ⟵ $\boxed{ن = ٢}$

[- - - - - - + + + + + + +

٠ ٢

التسارع موجب عندما ن ∈ (٢ ، ∞)

التسارع سالب عندما ن ∈ [٠ ، ٢)

ب) ع = ٠ ⟵ ٣ن^2 - ١٢ن + ٩ = ٠

ن^2 - ٤ن + ٣ = ٠ ⟵ (ن - ٣) (ن - ١) = ٠

$\boxed{ن = ٣ \ ، \ ن = ١}$

ع [+ + + - - - - - - - + + + + +

٠ ١ ٣

السرعة موجبة عندما ن ∈ [٠ ، ١) ∪ (٣ ، ∞)

السرعة سالبه عندما ن ∈ (١ ، ٣)

٢٦) أسقط شخص جسماً من نقطة على سطح بناية بحيث أن المسافة بالأقدام التي يقطعها بعد ن ثانية ف$_١$(ن) = ١٦ن^2 ، وفي اللحظة نفسها رمي شخص ثانٍ جسماً عمودياً إلى أسفل بحيث أن المسافة بالأقدام بعد ن ثانية ف$_٢$(ن) = ٤٠ن + ١٦ن^2 فإذا ارتطم الجسم الأول بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام الجسم الثاني بالأرض فجد :

ا) سرعة الجسم الثاني لحظة ارتطامه بالأرض

ب) ارتفاع البناية

الحل : ف$_{١بناية}$ = ١٦(ن + ١)^2 | ف$_{٢بناية}$ = ٤٠ن + ١٦ن^2

ف$_{١أرض}$ = ا - ١٦(ن + ١)^2 | ف$_{٢أرض}$ = ا - ٤٠ن - ١٦ن^2

ف$_{١أرض}$ = ف$_{٢أرض}$

ا - ١٦(ن + ١)^2 = ا - ٤٠ن - ١٦ن^2

$\cancel{ا}$ - ١٦(ن^2 + ٢ن + ١) = $\cancel{ا}$ - ٤٠ن - ١٦ن^2

- $\cancel{١٦ن^2}$ - ٣٢ن - ١٦ = - ٤٠ن - $\cancel{١٦ن^2}$

٨ن = ١٦ ⟵ ن = ٢ لحظة ارتطام الجسم الثاني بالأرض

ا) ع$_٢$ = ٣٢ن + ٤٠ = ٤٠ + ٣٢×٢

= ٤٠ + ٦٤ = ١٠٤ قدم/ث

ب) ارتفاع البناية $ف_{٢أرض} \Big|_{ن=٢} = ٠ \longrightarrow ا - ٨٠ - ٦٤ = ٠$

$\boxed{ا = ١٤٤}$

أو ف $ف_{١أرض} \Big|_{ن=٢} = ٠ \longrightarrow ا - ١٦×٩ = ٠$

$\boxed{ا = ١٤٤}$

٢٧) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم حسب العلاقة :

ف(ن) = $\sqrt{ن}$ (٢٧ - ن) أثبت أن هذه النقطة تبدأ في العودة بعد ٩ ثوانٍ ثم جد المسافة التي قطعتها النقطة عندئذٍ :

الحل : $ع = \sqrt{ن} \times -١ + (٢٧ - ن) \times \frac{١}{٢\sqrt{ن}}$

$ع = ٠ \longrightarrow \frac{٢٧ - ن}{٢\sqrt{ن}} = \sqrt{ن} \longrightarrow ٢٧ - ن = ٢ن$

٣ن = ٢٧ ⟵ $\boxed{ن = ٩}$

+ + + + - - - - - -

٩

ف(٩) = ٣ × (٢٧ - ٩) = ٣ × ١٨ = ٥٤ متراً

٢٨) قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض وفق العلاقة ف(ن) = ٤٠ن – ٥ن^{٢} جد :

أ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم

ب) سرعة الجسيم وهو على ارتفاع ٦٠م عن سطح الأرض

ج) سرعة الجسيم عندما يقطع مسافة ١٠٠ متر

الحل : $\boxed{\begin{array}{l}\text{ف} = ٤٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢} \\ \text{ع} = ٤٠ - ١٠\text{ن}\end{array}}$

أ) ف$|_{\text{ن}=٤}$ = ٤٠×٤ – ٥×١٦ = ١٦٠ – ٨٠ = ٨٠ متراً

٤٠ – ١٠ن = ٠ ⟵ ٤٠ = ١٠ن ⟵ ن = ٤ ⟵ $\boxed{}$

ب) ع$|_{\text{ف}=٦٠}$

ن = ٢ ⟵ ٤٠ – ٢٠ = ٢٠ م/ث

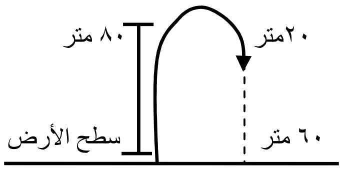
ن = ٦ ⟵ ٤٠ – ٦٠ = -٢٠ م/ث

ف = ٦٠ ⟵ ٦٠ = ٤٠ن – ٥ن^{٢} ⟵ ٥ن^{٢} - ٤٠ن + ٦٠ = ٠

ن^{٢} - ٨ن + ١٢ = ٠ ⟵ (ن – ٦) (ن – ٢) = ٠

$\boxed{\text{ن} = ٦ \text{ ، } \text{ن} = ٢}$

ج) المسافة المقطوعة ١٠٠ متر



ع$|_{\text{ف أرض}=٦٠}$ = ٤٠ – ٦٠ = -٢٠ م/ث

ف أرض = ٦٠ ⟵ ن = ٦ ، ن = $\cancel{٢}$ مرفوضه

هابط صاعد

---

٢٩) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة

ف(ن) = $\frac{\text{ن}}{٢}$ - جا^{٢}ن ، ن ∈ [٠ ، π] ، جد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته .

الحل : ف(ن) = $\frac{\text{ن}}{٢}$ - (جان)^{٢}

ع(ن) = $\frac{١}{٢}$ - ٢ جا ن جتا ن = $\frac{١}{٢}$ - جا ٢ن

ت(ن) = - ٢ جتا (٢ ن)

ت$|_{\text{ع}=٠}$

- ٢ جتا (٣٠) = - ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

- ٢ جتا (١٥٠) = - ٢ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ = - $\sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

* $\frac{١}{٢}$ - جا ٢ ن = ٠ ⟵ جا ٢ ن = $\frac{١}{٢}$

٢ ن = ٣٠° ⟵ ن = ١٥°

٢ ن = ١٥٠° ⟵ ن = ٧٥°

التطبيقات الهندسية :

* الميل = م = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

* الميل = م = ظاهـ حيث هـ (باتجاه محور السينات الموجب)

ميل المماس = م = ق′(س) = $\frac{ءص}{ءس}$ = المشتقة الأولى

ميل العمودي على المماس = ل = $\frac{-1}{م}$

* معادلة المماس : الثلاثي المرعب

$س_1$ = $ص_1$ =   م =

نقطة التماس   ميل المماس

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

* معادلة العمودي : $ص - ص_1 = ل(س - س_1)$

Passward :

١) ق يقطع محور السينات ← ق = ٠ ، ص = ٠

٢) ق يقطع هـ ← ق = هـ

٣) ق يوازي هـ ← ق′ = هـ′

عمودي ق يوازي هـ ← $\frac{-1}{ق′}$ = هـ′

٤) ق يوازي محور السينات ، مماس أفقي ق′ = ٠

٥) ق يعامد هـ ← ق′ × هـ′ = -١

عمودي ق يعامد هـ ← $\frac{-1}{ق′}$ × هـ′ = -١

٦) ق يمس هـ ← ق′ = هـ′ ، ق = هـ (عند نقطة التماس) (لها مماس مشترك)

٧) ق يمس محور السينات ← ق′ = ٠ ، ق = ٠

٨) * (أ ، ب) نقطة ← ق(أ) = ب

* (أ ، ب) مماس أفقي ← ق(أ) = ب ، ق′(أ) = ٠

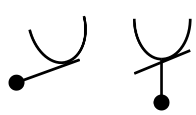
* معادلة المماس نجد منها الصورة والمشتقة

٩) النقطة الوهمية (الخارجية) :

* المماس يمر ، مماس مرسوم ، عمودي يمر

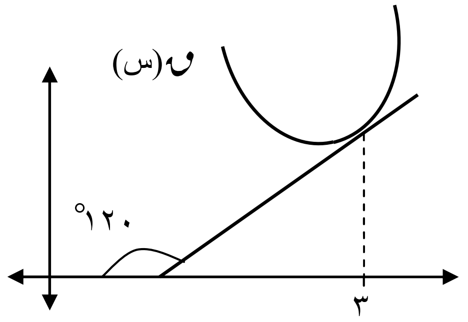
ميل ثابت = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ونساويهم

ميل توجيهي = ق′(س) ببعضهم



* يفضل في الهندسية عادةً أن نجعل ص موضع القانون قبل البدء بالحل إن استطعنا

١) اعتماداً على الشكل التالي أوجد ق′(٣) ؟



الحل : ق′(٣) = ظا٦٠ = $\sqrt{3}$

قاعدة :

ق′(أ) = ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = أ

٢) إذا كان ق(س) = $س^2 + 1$ ، أوجد ميل المماس عند س = ٣ :

أ) -٦   ب) ٦   ج) -١٠   د) ١٠

٣) إذا كان $س^2 + ص^2 = 25$ ، أوجد ميل المماس عند النقطة (٣ ، ٤) :

أ) $\frac{8}{6}$ ب) $\frac{6}{8}$ ج) $\frac{-8}{6}$ د) $\frac{-6}{8}$

الحل : ٢س + ٢ص ص′ = ٠ ← $\frac{2ص\ ص′}{2ص} = \frac{-2س}{2ص}$

ص′ = $\frac{-س}{ص} = \frac{-3}{4}$

٤) قيمة س التي يكون عندها ميل المماس يساوي (٤) للاقتران ق(س) = $س^2 + 2س$ هي :

أ) ١   ب) -١   ج) ٢   د) -٢

الحل : ق′(س) = ٢س + ٢

ق′(س) = ٤ ← ٢س + ٢ = ٤

٢س = ٢ ← $\boxed{س = 1}$

٥) أوجد ميل العمودي على المماس لمنحنى
$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٣\text{س}$ عندما س = ١ :

أ) -٦   ب) ٦   جـ) $\frac{-١}{٦}$ د) $\frac{١}{٦}$

الحل : ميل المماس = $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٣$

$\text{ق}'(١) = ٦$

ميل العمودي = $\text{ل} = \frac{-١}{\text{م}} = \frac{-١}{٦}$

---

٦) إذا كانت $\text{ص}^{٢} - \text{س ص} = \text{س}^{٢} - ١$ ، اوجد معادلة المماس عند النقطة (٢ ، ٣) :

الحل :

$\text{س}_{١} = ٢$ $\text{ص}_{١} = ٣$ $\text{م} = \frac{٧}{٤}$

$٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - (\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}\times١) = ٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س} + \text{ص}}{٢\text{ص} - \text{س}} \longrightarrow \text{م} = \frac{٧}{٤}$

<u>معادلة المماس :</u> $\text{ص} - ٣ = \frac{٧}{٤}(\text{س} - ٢)$

$\text{ص} - ٣ = \frac{٧}{٤}\text{س} - \frac{٧}{٢} \longrightarrow \text{ص} = \frac{٧}{٤}\text{س} - \frac{٧}{٢} + ٣$

---

٧) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران
$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ٣}$ عند النقطة (١ ، ٢) :

الحل :

$\text{س}_{١} = ١$ $\text{ص}_{١} = ٢$ $\text{م} = \frac{١}{٤}$ ، $\text{ل} = -٤$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س} + ٣}} \longrightarrow \text{م} = \frac{١}{٤}$

<u>معادلة المماس:</u> $\text{ص} - ٢ = \frac{١}{٤}(\text{س} - ١)$

$\text{ص} = \frac{١}{٤}(\text{س} - ١) + ٢$

<u>معادلة العمودي:</u> $\text{ص} - ٢ = -٤(\text{س} - ١)$

$\text{ص} = -٤\text{س} + ٦$

---

٨) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران
$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}$ ، س > ٠ عند س = ٤ :

الحل :

$\text{س}_{١} = ٤$ $\text{ص}_{١} = ٥$ $\text{م} = \frac{٧}{٨}$ ، $\text{ل} = \frac{-٨}{٧}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + ٢\text{س}^{\frac{-١}{٢}} \longrightarrow \text{ق}(٤) = ٤ + \frac{٢}{٢} = ٤ + ١ = ٥$

$\text{ق}'(\text{س}) = ١ - \text{س}^{\frac{-٣}{٢}}$

$\text{ق}'(٤) = ١ - \frac{١}{(٤)^{\frac{٣}{٢}}} = ١ - \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$

<u>معادلة المماس:</u> $\text{ص} - ٥ = \frac{٧}{٨}(\text{س} - ٤)$

<u>معادلة العمودي:</u> $\text{ص} - ٥ = \frac{-٨}{٧}(\text{س} - ٤)$

---

٩) أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٢$ عندما يكون ميل المماس يساوي ١٠ :

الحل :

$\text{س}_{١} = ٨$ $\text{ص}_{١} = ١٨$ $\text{م} = ١٠$

$٢\text{س} - ٦ = ١٠ \longrightarrow ٢\text{س} = ١٦ \longrightarrow \text{س} = ٨$

$\text{ق}(٨) = ٦٤ - ٤٨ + ٢ = ١٨$

$\text{ص} - ١٨ = ١٠(\text{س} - ٨) \longrightarrow \text{ص} - ١٨ = ١٠\text{س} - ٨٠$

$\text{ص} = ١٠\text{س} + -٦٢$

---

١٠) أوجد معادلة المماس لمنحنى س ص = ١٦ عندما يكون ميل المماس لمنحنى ص يساوي (-١) :

الحل :

$\text{س}_{١} = ٤$ $\text{ص}_{١} = ٤$ $\text{م} = -١$

$\text{س}_{١} = -٤$ $\text{ص}_{١} = -٤$ $\text{م} = -١$

$\text{س ص} = ١٦ \longrightarrow \text{ص} = \frac{١٦}{\text{س}} \longrightarrow \text{ص}' = \frac{-١٦}{\text{س}^{٢}}$

$-١ = \frac{-١٦}{\text{س}^{٢}} \longrightarrow \text{س}^{٢} = ١٦ \longrightarrow \boxed{\text{س} = \pm ٤}$

$\text{ص} - ٤ = -١(\text{س} - ٤)$ $\text{ص} = -\text{س} + ٨$

$\text{ص} + ٤ = -١(\text{س} + ٤)$ $\text{ص} = -\text{س} - ٨$

١١) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س) = ٣س^{٢} + ٧س + ١ ، عند النقطة التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها ٤٥° مع محور السينات الموجب :

الحل :

١٢) إذا كان ق(س) = جـ س^{٢} + جـ س + ٢ ، وكان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢ ، ق(٢)) هو ٤٥° مع محور السينات السالب ، فجد قيمة الثابت جـ :

الحل : ق$'$(س) = ٢جـ س + جـ

٤جـ + جـ = ظا(١٣٥°) ⟵ ٥جـ = -١ ⟵ $\boxed{جـ = \frac{-١}{٥}}$

١٣) جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة :
ص^{٢} + س^{٢} + ٦ص − ٢س + ٢ = ٠ عند النقطة (٣ ، -١) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات :

الحل : ٢ص $\frac{دص}{دس}$ + ٢س + ٦ $\frac{دص}{دس}$ - ٢ = ٠

-٢ $\frac{دص}{دس}$ + ٦ + ٦ $\frac{دص}{دس}$ - ٢ = ٠

٤ $\frac{دص}{دس}$ = -٤ ⟵ $\frac{دص}{دس}$ = -١

ظا(هـ) = -١ ⟵ هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

١٤) أوجد معادلة المماس لمنحنى ص^{٢} = ٤س عندما يكون ميل العمودي عليه يساوي $\frac{-١}{٤}$:

الحل :

س$_{١}$ = $\frac{١}{١٦}$ ، ص$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ ، م = ٤

٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٤ ⟵ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٢}{ص}$

٤ = $\frac{٢}{ص}$ ⟵ ص = $\frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٤}$ = ٤س ⟵ س = $\frac{١}{١٦}$

ص − $\frac{١}{٢}$ = ٤(س − $\frac{١}{١٦}$)

١٥) أوجد معادلة المماس والعمودي على الماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} - ٨ = ٠ عند تقاطعه مع محور السينات :

الحل :

س$_{١}$ = ٢ ، ص$_{١}$ = ٠ ، م = ١٢

ق(س) = ٠ ⟵ س^{٣} - ٨ = ٠ ⟵ س^{٣} = ٨ ⟵ س = ٢

ق$'$(س) = ٣س^{٢} ق$'$(٢) = ١٢

<u>معادلة المماس:</u> ص − ٠ = ١٢(س − ٢)

ص = ١٢س − ٢٤

١٦) أثبت أن المماسان لمنحنى الاقتران :
ق(س) = س^{٢} - ٥س + ٦ عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات متعامدين :

الحل : ق$'$(س) = ٢ س − ٥

م$_{١}$ = ١ ، م$_{٢}$ = -١

ق(س) = ٠ ⟵ س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠

(س − ٣)(س − ٢) = ٠

س = ٣ ⟵ م$_{١}$ = ٦ − ٥ = ١

س = ٢ ⟵ م$_{٢}$ = ٤ − ٥ = -١

∴ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = ١ × -١ = -١ متعامدين

١٧) جد معادلتي المماسين لمنحنى العلاقة س = ص^{٢} - ٤ص عند نقطتي تقاطع منحناها مع محور الصادات :

الحل :

س$_{١}$ = ٠ ص$_{١}$ = ٠ م = $\frac{١-}{٤}$

س$_{١}$ = ٠ ص$_{١}$ = ٤ م = $\frac{١}{٤}$

س = ص^{٢} - ٤ص

١ = ٢ ص صَ – ٤صَ ← صَ = $\frac{١}{٢ص - ٤}$

س = ٠ ← ص^{٢} - ٤ص = ٠ ← ص = ٠ ، ٤

(٠ ، ٠) ← م = $\frac{١}{٤-}$

(٠ ، ٤) ← م = $\frac{١}{٤}$

ص – ٠ = $\frac{١-}{٤}$ (س – ٠) ← ص = $\frac{١-}{٤}$ س

ص – ٤ = $\frac{١-}{٤}$ (س – ٠) ← ص = $\frac{١-}{٤}$ س + ٤

١٨) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} ، عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص – س – ٦ = ٠

الحل :

س$_{١}$ = ٢ ص$_{١}$ = ٨ م = ١٢

ق(س) = س^{٣} ← قَ(س) = ٣س^{٢}

ص = س + ٦

ق = ص ← س^{٣} = س + ٦ ← س^{٣} - س – ٦ = ٠

س = ٢ (بالتجريب)

ق(٢) = ٨ ← م = قَ(٢) = ١٢

ص – ٨ = ١٢(س – ٢)

ص – ٨ = ١٢س – ٢٤ ← $\boxed{\text{ص = ١٢س - ١٦}}$

١٩) معادلة المماس لمنحنى :
(س + ص)^{٣} - ٥س + ص = ١ عند تقاطعه مع المستقيم س + ص = ١ :

الحل :

س$_{١}$ = $\frac{١}{٦}$ ص$_{١}$ = $\frac{٥}{٦}$ م = $\frac{١}{٢}$

(س + ص)^{٣} - ٥س + ص = ١ يتقاطع مع ص = ١ – س

* عند تقاطع العلاقات الضمنية نُعوض الأسهل في الأصعب

* (س + ١ – س)^{٣} - ٥س + ١ – س = ١

١ – ٥س + ١ – س = ١ ← -٦س = -١ ← س = $\frac{١}{٦}$

* <u>ومن العلاقة الأسهل نجد قيمة ص :</u>

ص = ١ - $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

* <u>نشتق المعادلة الأولى :</u>

٣(س + ص)^{٢} (١ + صَ) – ٥ + صَ = ٠

٣($\frac{١}{٦}$ + $\frac{٥}{٦}$)^{٢} (١ + صَ) – ٥ + صَ = ٠

٣ + ٣صَ – ٥ + صَ = ٠ ← ٤صَ = ٢ ← صَ = $\frac{١}{٢}$

<u>معادلة المماس :</u> ص - $\frac{٥}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{١}{٦}$)

٢٠) جد معادلة المماس لمنحنى س^{٢}+ ص^{٢} = ٢٥ عند نقطتي تقاطعه مع المستقيم س + ص = ١ :

الحل : ص + ٣ = $\frac{٤}{٣}$ (س – ٤) مماس أول

ص + ٤ = $\frac{٣}{٤}$ (س + ٣) مماس ثاني

٢١) بين أن مماس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤}{س}$ ، ومماس منحنى الاقتران هـ(س) = س متعامدان عند نقطة تقاطعهما :

الحل : نجد تقاطع ق مع هـ ثم نختبر ميل المماسات عندها

* ق = هـ ← $\frac{٤}{س}$ = س ← س^{٢} = ٤ ← س = ±٢

نقاط التقاطع (٢ ، ٢) (-٢ ، -٢)

قَ(س) = $\frac{٤-}{س^{٢}}$ ، هـَ(س) = ١

(٢ ، ٢) ← م$_{١}$ × م$_{٢}$ = قَ(٢) × هـَ(٢) = -١ × ١ = -١

(-٢ ، -٢) ← م$_{١}$ × م$_{٢}$ = قَ(-٢) × هـَ(-٢) = -١ × ١ = -١

∴ متعامدان

٢٢) أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٣ ، عندما يكون المماس موازياً المستقيم ص – ٣س = ٤ :

الحل :

س$_{١}$ = ١ ص$_{١}$ = ٤ م = ٣

س$_{١}$ = -١ ص$_{١}$ = ٢ م = ٣

ق(س) = س^{٣} + ٣ ⟵ ق$'$(س) = ٣س^{٢}

ق(س) يوازي ص = ٤ + ٣س

ق$'$(س) = ص$'$

٣س^{٢} = ٣ ⟵ س = ±١

ص – ٤ = ٣(س – ١) (مماس أول)

ص – ٢ = ٣(س + ١) (مماس ثاني)

٢٣) جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة (ص – ٤)^{٢} = س + ٢ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم الذي معادلته : ٣س + ٦ص + ٢ = ٠ :

الحل :

س$_{١}$ = -١ (-١ ، ٣) ص$_{١}$ = ٣

(ص – ٤)^{٢} = س + ٢ ⟵ ٢(ص – ٤)^{١} × ص$'$ = ١

ص$'$ = $\frac{١}{٢ص - ٨}$

المماس موازياً ص = $\frac{-٣س - ٢}{٦}$

$\frac{١}{٢ص - ٨}$ = $\frac{-٣}{٦}$

٢ص – ٨ = -٢ ⟵ ٢ص = ٦ ⟵ ص = ٣

١ = س + ٢ ⟵ س = -١ ⟵ (-١ ، ٣)

٢٤) جد الإحداثي السيني للنقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٤} - ٤س^{٢} + ٤ موازياً للمستقيم الذي معادلته ص + ٤س + ١ = ٠ :

الحل : افرض أن ميل المماس م ، وميل المستقيم م$_{١}$

والنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة التماس لمنحنى الاقتران ق

إذن م = ق$'$(س$_{١}$) = ٤(س$_{١}$)^{٣} – ٨ س$_{١}$

وبما أن مماس منحنى الاقتران ق عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) يوازي المستقيم ل ، إذن :

م = م$_{١}$

٤(س$_{١}$)^{٣} – ٨ س$_{١}$ = -٤ ⟵ ٤(س$_{١}$)^{٣} – ٨ س$_{١}$ + ٤ = ٠

٤(س$_{١}$ - ١) ((س$_{١}$)^{٢} + س$_{١}$ - ١) = ٠

ومنه س$_{١}$ = ١ أو $\frac{-١ + \sqrt{٥}}{٢}$ أو $\frac{-١ - \sqrt{٥}}{٢}$

٢٥) ما معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س - $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، إذا كان العمودي موازياً للمستقيم الذي معادلته س + ٢ص = ٧ :

الحل :

س$_{١}$ = ١ ص$_{١}$ = ٠ م = ٢ ، ل = $\frac{-١}{٢}$

س$_{١}$ = -١ ص$_{١}$ = ٠ م = ٢ ، ل = $\frac{-١}{٢}$

ق(س) = س - $\frac{١}{س}$ ⟵ ق$'$(س) = ١ + $\frac{١}{س^{٢}}$

العمودي موازياً للمستقيم ص = $\frac{٧ - س}{٢}$

$\frac{-١}{ق'(س)}$ = ص$'$ ⟵ $\frac{-١}{١ + \frac{١}{س^{٢}}}$ = $\frac{-١}{٢}$

١ + $\frac{١}{س^{٢}}$ = ٢ ⟵ $\frac{١}{س^{٢}}$ = ١ ⟵ س^{٢} = ١

⟵ $\boxed{س = ±١}$

<u>معادلة العمودي :</u> ص – ٠ = $\frac{-١}{٢}$ (س – ١)

ص – ٠ = $\frac{-١}{٢}$ (س – ١)

ص – ٠ = $\frac{-١}{٢}$ (س + ١)

٢٦) جد جميع النقط الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + ٧ والتي يكون المماس لمنحنى ق(س) عندها يعامد المستقيم س + ٥ص + ٢ = ٠ :

الحل :

---

٢٧) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٤س + ٣ بحيث يكون المماس عمودياً على المستقيم الذي معادلته ٦ص – ٣س – ٥ = ٠ :

الحل :

س$_{١}$ = ١ ، ص$_{١}$ = ٠ ، م = -٢

ق(س) = س^{٢} - ٤س + ٣ ⟵ قَ(س) = ٢س – ٤

المماس عمودياً على ص = $\frac{\text{٣س + ٥}}{\text{٦}}$

قَ(س) × صَ = -١ ⟵ (٢س – ٤) × $\frac{١}{٢}$ = -١

س – ٢ = -١ ⟵ س = ١

ص – ٠ = -٢(س – ١) ⟵ ص = -٢س + ١

---

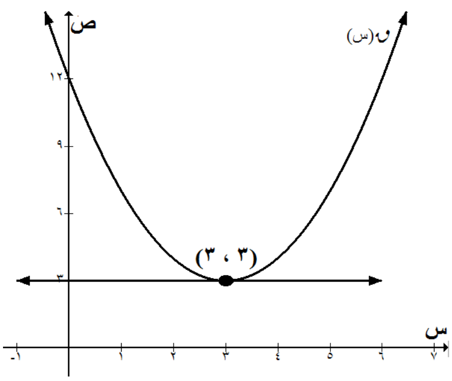
٢٨) بين أن لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٦س + ١٢ مماساً أفقياً عند النقطة (٣ ، ٣) :

الحل : ميل المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هو قَ(س$_{١}$) ،

قَ(س$_{١}$) = ٢ س$_{١}$ – ٦

قَ(٣) = ٢ × ٣ – ٦

= ٠



---

٢٩) بين أن لمنحنى الاقتران ق(س) = جا^{٢}س مماساً أفقياً أفقياً في الفترة [٠ ، π]

الحل : ق(س) = (جا س)^{٢}

قَ(س) = ٢(جا س)(جتا س) × ١

قَ(س) = جا ٢س

جا ٢س = ٠ ⟵ ٢س = ٠ ، π ، ٢π ، ....

س = ٠ ، $\frac{π}{٢}$ ، π

س = ~~٠~~ ، π (مرفوضه لأنها أطراف)

س = $\frac{π}{٢}$ ∈ (٠ ، π)

∴ لمنحنى ق(س) مماس أفقي عند س = $\frac{π}{٢}$

---

٣٠) جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س^{٤} - ٤س عندما يكون المماس موازياً لمحور السينات :

الحل :

س$_{١}$ = ١ ، ص$_{١}$ = -٣ ، م = ٠

المماس موازياً لمحور السينات (ص = ٠)

قَ(س) = صَ

٤س^{٣} - ٤ = ٠ ⟵ $\boxed{\text{س = ١}}$

ص - -٣ = ٠(س – ١) ⟵ $\boxed{\text{ص = -٣}}$

٣١) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ عند نقطة مماسه مع منحنى الاقتران $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢}\text{س} + \frac{٣}{٢}$:

الحل :

$\text{س}_{١} = ١$ ، $\text{ص}_{١} = ١$ ، $\text{م} = \frac{١}{٢}$

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} \longrightarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢}\text{س} + \frac{٣}{٢} \longrightarrow \text{هـ}'(\text{س}) = ٢\text{س} - \frac{٣}{٢}$

ق(س) يمس هـ(س)

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$\sqrt{\text{س}} = \text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢}\text{س} + \frac{٣}{٢}$

بالتجريب $\boxed{\text{س} = ١}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{س})$

$٢\text{س} - \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$٤\text{س}\sqrt{\text{س}} - ٣\sqrt{\text{س}} = ١$

بالتجريب $\boxed{\text{س} = ١}$

<u>معادلة المماس</u> : $\text{ص} - ١ = \frac{١}{٢}(\text{س} - ١)$

٣٢) جد قيمة كل من الثابتين ب ، جـ اللتين تجعلان المستقيم الذي معادلته : $\text{ص} - \text{س} - ٢ = ٠$ مماساً لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$ عند النقطة (٠ ، ٢) :

الحل:

$\text{ص} = \text{س} + ٢$ يمس $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$ عند (٠ ، ٢)

$\text{ص} = \text{ق}(٠)$

$\text{س} + ٢ = \text{س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$

$\boxed{٢ = \text{جـ}}$

$\text{ص}' = \text{ق}'(٠)$

$١ = ٢\text{س} + \text{ب}$

$١ = ٠ + \text{ب} \longrightarrow \boxed{\text{ب} = ١}$

٣٣) إذا كان المستقيم $٢\text{س} - \text{ص} + \text{جـ} = ٠$ يمس منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{-٢}{\text{س}}$ عند النقطة ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$) فجد قيم الثابت جـ :

الحل : $\text{ص} = ٢\text{س} + \text{جـ}$ يمس $\text{ق}(\text{س}) = \frac{-٢}{\text{س}}$

$\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$

$٢\text{س} + \text{جـ} = \frac{-٢}{\text{س}}$

$٢ + \text{جـ} = -٢ \longrightarrow \boxed{\text{جـ} = -٤}$

$-٢ + \text{جـ} = ٢ \longrightarrow \boxed{\text{جـ} = ٤}$

$\text{ص}' = \text{ق}'(\text{س})$

$٢ = \frac{٢}{\text{س}^{٢}}$

$\text{س}^{٢} = ١ \longrightarrow \boxed{\text{س} = \pm ١}$

٣٤) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -٢)،(٢ ، ٦) يمس منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ س}^{٢} + ٢\text{س} - ١$ ، جد الثابت أ :

الحل : يجب أولاً إيجاد معادلة الخط المستقيم

$\text{م} = \frac{٦ - -٢}{٢ - ٠} = \frac{٨}{٢} = ٤$

$\text{ص} - -٢ = ٤(\text{س} - ٠) \longrightarrow \text{ص} = ٤\text{س} - ٢$

$\text{ص} = ٤\text{س} - ٢$ يمس $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ س}^{٢} + ٢\text{س} - ١$

$\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$

$٤\text{س} - ٢ = \text{أ س}^{٢} + ٢\text{س} - ١$

$٤\text{س} - ٢ = \text{أ س}\times\text{س} + ٢\text{س} - ١$

$٤\text{س} - ٢ = ١\times\text{س} + ٢\text{س} - ١$

$٤\text{س} - ٢ = ٣\text{س} - ١$

$\text{س} = ١ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ١}$

$\text{ص}' = \text{ق}'(\text{س})$

$٤ = ٢\text{أ س} + ٢$

$٢\text{أ س} = ٢$

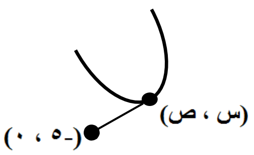
$\boxed{\text{أ س} = ١}$

٣٥) أوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة (-٥ ، ٠) لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}$:

الحل :

$\text{س}_{١} = ٤$ ، $\text{ص}_{١} = ٦$ ، $\text{م} = \frac{٢}{٣}$

<u>ميل ثامن</u> : $\text{م} = \frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} + ٥}$



<u>ميل توجيهي</u> : $\text{م} = \frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}}$

* ميل ثامن = ميل توجيهي

$\frac{\text{ص}}{\text{س} + ٥} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}}$

$\frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}}{\text{س} + ٥} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}}$

$\cancel{\text{س}^{٢}} + ٢٠ = \cancel{\text{س}^{٢}} + ٥\text{س} \longrightarrow ٥\text{س} = ٢٠$

$\boxed{\text{س} = ٤}$

$\text{ص} - ٦ = \frac{٢}{٣}(\text{س} - ٤)$

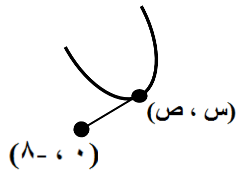
٣٦) جد معادلة المماس الرسوم من النقطة (٠ ، -٨) لمنحنى العلاقة س^{٢}-ص^{٢} = ٨ :

الحل :

س$_{١}$ = ٣ ص$_{١}$ = ١ م = ٣

س$_{١}$ = -٣ ص$_{١}$ = ١ م = -٣

ص^{٢} = س^{٢} - ٨ ← ٢ص ص$'$ = ٢س ← ص$'$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$



<u>ميل ثامن</u> : م = $\frac{\text{ص} + ٨}{\text{س} - ٠}$

<u>ميل توجيهي</u> : م = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

* ميل ثامن = ميل توجيهي ← $\frac{\text{ص} + ٨}{\text{س} - ٠} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

س^{٢} = ص^{٢} + ٨ص ← ~~ص^{٢}~~ + ٨ = ~~ص^{٢}~~ + ٨ ص

$\boxed{\text{ص} = ١}$ ← س^{٢} - ٨ = ١ ← س^{٢} = ٩ ← $\boxed{\text{س} = \pm ٣}$

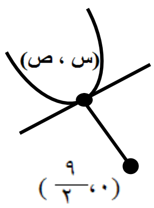
ص - ١ = ٣(س - ٣) (مماس أول)

ص - ١ = -٣(س + ٣) (مماس ثاني)

٣٧) جد معادلة العمودي على المماس لمنحى ق(س) = س^{٢} إذا كان العمودي مرسوماً من النقطة (٠ ، $\frac{٩}{٢}$) :

الحل :

س$_{١}$ = ص$_{١}$ = م =



<u>ميل ثامن</u> : م = $\frac{\text{ص} - \frac{٩}{٢}}{\text{س} - ٠}$

<u>ميل توجيهي</u> : م = $\frac{-١}{\text{ق}'(\text{س})} = \frac{-١}{٢\text{س}}$

$\frac{\text{ص} - \frac{٩}{٢}}{\text{س} - ٠} = \frac{-١}{٢\text{س}}$ ← ٢س^{٣} - ٩س = - س

٢س^{٣} - ٨س = ٠ ← ٢س(س^{٢} - ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ٢ ، س = -٢

(٢ ، ٤) ← ص - ٤ = $\frac{-١}{٤}$ (س - ٢)

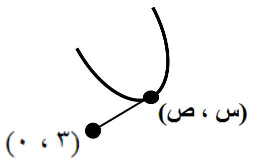
(-٢ ، ٤) ← ص - ٤ = $\frac{١}{٤}$ (س + ٢)

(٠ ، ٠) ← س = ٠ (محور الصادات لأن الميل غير معروف)

٣٦) أثبت أن لمنحنى الاقتران : ق(س) = ٥ - س^{٢} ، مماسين مرسومين من (٣ ، ٠) :

الحل :

س$_{١}$ = ص$_{١}$ =



<u>ميل ثامن</u> : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٣}$

<u>ميل توجيهي</u> : م = -٢س

$\frac{٥ - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٣}$ = -٢س ← ٥ - س^{٢} = -٢س^{٢} + ٦س

س^{٢} - ٦س + ٥ = ٠ ← (س - ٥) (س - ١) = ٠

(٥ ، -٢٠) ، (١ ، ٤) نقاط التماس

ص + ٢٠ = -١٠(س - ٥) معادلة المماس الأولى

ص - ٤ = -٢(س - ١) معادلة المماس الثانية

٣٧) إذا كان المستقيم ٤س - ٢ص - ٨ = ٠ يمس منحنى ق عند (٣ ، ٢) وكان المستقيم ٩ص + ٣س = ٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل عند (٣ ، -١) أوجد (ق×ل)$'$(٣) :

الحل :

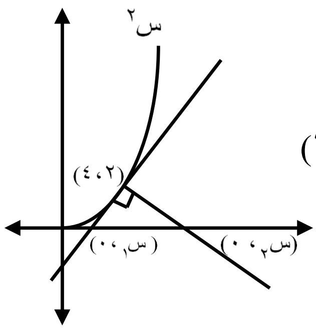
٣٨) جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة (٠ ، ١) لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٣}$ + ٣ والعمودي على المماس عند نقطة التماس والمستقيم ص = ١ :

الحل :

٣٩) أوجد مساحة المثلث المتكون من المماس والعمودي على المماس والسينات على منحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢}$ عند النقطة (٢ ، ٤) :

الحل : المماس ، العمودي ، السينات

$س_{١}$ = ٢ $ص_{١}$ = ٤ م = ٢س = ٤ ، ل = $\frac{-١}{٤}$



المماس : ص – ٤ = ٤(س – ٢)

العمودي : ص – ٤ = $\frac{-١}{٤}$ (س – ٢)

السينات : ص = ٠

المماس = العمودي ⟵ عند نقطة التماس دائماً (٢ ، ٤)

المماس = السينات ⟵ -٤ = ٤س – ٨

٤س = ٤ ⟵ س = ١ ⟵ (١ ، ٠)

العمودي = السينات ⟵ -٤ = $\frac{-١}{٤}$ (س – ٢)

١٦ = س – ٢ ⟵ س = ١٨ ⟵ (١٨ ، ٠)

م المثلث = $\frac{١}{٢}$ (١٨ – ١) × (٤ – ٠) = ٣٤ وحدة مربعة

٤٠) ما مساحة المثلث المحصور بين محوري الإحداثيات ومماس المنحنى ص = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ ، عند النقطة (٢ ، $\frac{١}{٢}$) :

الحل : محور السينات ، محور الصادات ، المماس

$س_{١}$ = ٢ $ص_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ م = $\frac{-١}{س^{٢}}$ = $\frac{-١}{٤}$

محور السينات : ص = ٠ ، محور الصادات : س = ٠

المماس : ص – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{-١}{٤}$ (س – ٢)

السينات = الصادات ⟵ (٠ ، ٠)

السينات = المماس ⟵ $\frac{-١}{٢}$ = $\frac{-١}{٤}$ (س – ٢)

س = ٤ ⟵ (٤ ، ٠)

الصادات = المماس ⟵ ص – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{-١}{٤}$ × -٢

ص – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ⟵ ص = ١ ⟵ (٠ ، ١)

م المثلث = $\frac{١}{٢}$ (٤ – ٠) × (١ – ٠) = ٢ وحدة مساحة

٤١) جد مساحة المثلث القائم الزاوية ، المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ص = $\sqrt{س}$ ، س > ٠ عند النقطة (٤ ، ٢) ومحور السينات والمستقيم س = ٤ :

الحل : المماس ، محور السينات ، س = ٤

$س_{١}$ = ٤ $ص_{١}$ = ٢ م = $\frac{١}{٤}$

ص = $\sqrt{س}$ ، صَ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

المماس : ص – ٢ = $\frac{١}{٤}$ (س – ٤)

محور السينات : ص = ٠

المستقيم : س = ٤

المماس = السينات : -٢ = $\frac{١}{٤}$ (س – ٤)

-٨ = س – ٤ ⟵ س = -٤ ⟵ (-٤ ، ٠)

المماس = المستقيم : ص – ٢ = ٠ ⟵ ص = ٢ ⟵ (٤ ، ٢)

السينات = المستقيم : (٤ ، ٠)

م المثلث = $\frac{١}{٢}$ (٤ – -٤) × (٢ – ٠) = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٢ = ٨ وحدة مربعة

٤٢) أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنى :
٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٤٥ ، س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٥ عند نقطتي تقاطع المنحنيين في الربع الأول متعامدين :

الحل : ٤س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٤٥ <u>يتقاطع</u> س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٥

نستخدم الحذف

٤س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٤٥
-٤س^{٢} + ١٦ص^{٢} = -٢٠ (نضرب المعادلة ٢ بـ (-٤))

٢٥ص^{٢} = ٢٥ ⟵ ص^{٢} = ١ ⟵ ص = ± ١

نعوض بأي معادلة ⟵ ٤س^{٢} + ٩ = ٤٥

٤س^{٢} = ٣٦ ⟵ س^{٢} = ٩ ⟵ س = ± ٣

نقطة التقاطع (٣ ، ١)

٨س + ١٨ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ⟵ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٨س}}{\text{١٨ص}}$

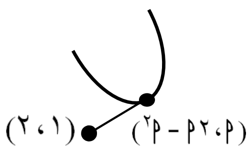
٢س - ٨ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ⟵ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٢س}}{\text{٨ص}}$

م$_{١}$ = $\frac{-٨ \times ٣}{١٨ \times ١} = \frac{-٨}{٦} = \frac{-٤}{٣}$

م$_{٢}$ = $\frac{٢ \times ٣}{٨ \times ١} = \frac{٣}{٤}$

م$_{١}$ × م$_{٢}$ = $\frac{-٤}{٣} \times \frac{٣}{٤}$ = $\boxed{-١}$ متعامدين

٤٣) رسم من النقطة م : (١ ، ٢) مماسان لمنحنى الاقتران ص = ٢س – س^{٢} فمساه عند ل ، هـ جد مساحة المثلث م ل هـ :



الحل : <u>ميل ثامن</u> : م = $\frac{\text{٢أ} - \text{أ}^{٢} - ٢}{\text{أ} - ١}$

<u>ميل توجيهي</u> : م = ٢ - ٢س = ٢ - ٢أ

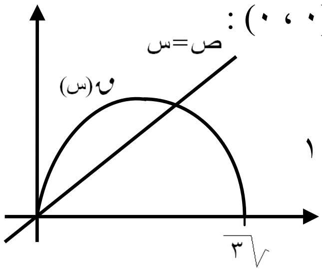
$\frac{\text{٢أ} - \text{أ}^{٢} - ٢}{\text{أ} - ١}$ = ٢ - ٢أ ⟵ ٢أ - أ^{٢} - ٢ = ٢أ - ٢ - ٢أ^{٢} + ٢أ

⟵ أ^{٢} - ٢أ = ٠ ⟵ أ(أ - ٢) = ٠

أ = ٠ ، أ = ٢ ⟵ ل (٠ ، ٠) ، هـ (٢ ، ٠)

م$_{\text{المثلث}}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢ - ٠) × (٢ – ٠) = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ = ٢ وحدة مربعة

٤٤) في الشكل التالي أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{٣}$ س – س^{٢} عند (٠ ، ٠) :



الحل : ظا(هـ$_{١}$) = م$_{١}$ = ص َ = ١

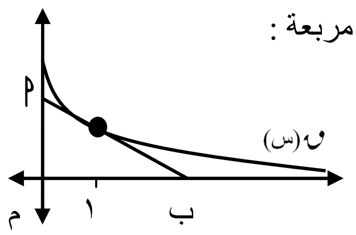
ظا هـ$_{١}$ = ١ ⟵ هـ$_{١}$ = ٤٥°

ظا(هـ$_{٢}$) = م$_{٢}$ = ق َ(٠) = $\sqrt{٣}$ – ٢س = $\sqrt{٣}$

ظا(هـ$_{٢}$) = $\sqrt{٣}$ ⟵ هـ$_{٢}$ = ٦٠°

∴ هـ = هـ$_{٢}$ - هـ$_{١}$ = ٦٠° - ٤٥° = ١٥°

٤٥) معتمداً على الشكل الذي فيه المثلث أ م ب الذي ضلعه $\overline{\text{أب}}$ يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{\text{جـ}}{\text{س} + ١}$ ، عند (١ ، ق(١)) ، جد قيمة الثابت جـ التي تجعل مساحة المثلث تساوي $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة :



الحل : <u>محور السينات</u> : ص = ٠

<u>محور الصادات</u> : س = ٠

<u>المماس</u> :

س$_{١}$ = ١ ، ص$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ جـ ، م = $\frac{-١}{٤}$ جـ

ص - $\frac{١}{٢}$ جـ = $\frac{-١}{٤}$ جـ (س – ١)

<u>السينات = الصادات</u> : (٠ ، ٠)

<u>السينات = المماس</u> : - $\frac{١}{٢}$ جـ = - $\frac{١}{٤}$ جـ (س – ١)

٢ = س – ١ ⟵ س = ٣ ⟵ (٣ ، ٠)

<u>الصادات = المماس</u> : ص - $\frac{١}{٢}$ جـ = $\frac{١}{٤}$ جـ

ص = $\frac{١}{٤}$ جـ + $\frac{١}{٢}$ جـ ⟵ ص = $\frac{٣}{٤}$ جـ ⟵ (٠ ، $\frac{٣}{٤}$ جـ)

م △ = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × $\frac{٣}{٤}$ جـ = $\frac{٩}{٨}$ جـ = $\frac{٩}{٤}$

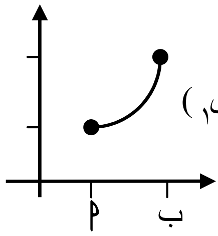
جـ = $\frac{٩}{٤} \times \frac{٨}{٩}$ = ٢

خصائص المنحنيات :

١) التزايد :

ق(س) متزايد على [أ ، ب] إذا كان

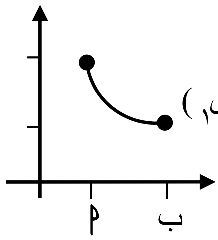
لكل س$_{2}$ > س$_{1}$ ⟵ ق(س$_{2}$) > ق(س$_{1}$)



٢) التناقص :

ق(س) متناقص على [أ ، ب] إذا كان

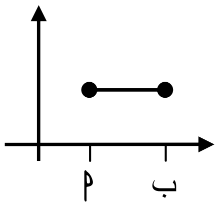
لكل س$_{2}$ > س$_{1}$ ⟵ ق(س$_{2}$) < ق(س$_{1}$)



٣) الاقتران الثابت :

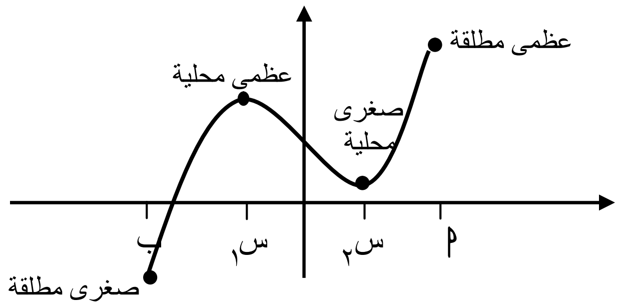
ق(س) ثابت على [أ ، ب] إذا كان

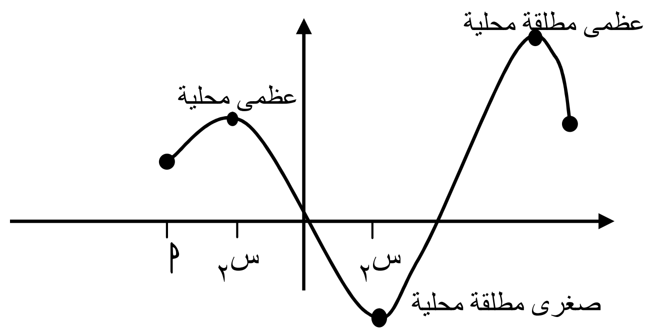
س$_{2}$ > س$_{1}$ ⟵ ق(س$_{2}$) = ق(س$_{1}$)



٤) القيم القصوى :

عظمى — صغرى





ملاحظة : الاقتران الثابت تعتبر قيمة صغرى وعظمى في نفس الوقت

٥) النقطة الحرجة :

إذا كانت س$_{1}$ ضمن مجال الاقتران ق ، فإن القيمة س$_{1}$ تسمى **قيمة حرجة** للاقتران ق إذا تحقق أن :

قَ(س$_{1}$) = ٠ أو قَ(س$_{1}$) غير موجودة . وفي هذه الحالة تسمى النقطة (س$_{1}$ ، ق(س$_{1}$)) **نقطة حرجة** للاقتران ق

مصادر الحرجة:
- أطراف مغلقة
- جذور (البسط ومقام المشتقة الأولى)
- التحول قد تؤدي إلى حرجة

* خطوات الحل :

* لمعرفة خصائص الاقتران ق(س) نشتق ونساوي بالصفر ثم نضع الإشارات على خط الأعداد وثم نضع الأطراف إلا في الدائري نضع الأطراف أولاً

* لمعرفة الإشارة نعوض في قَ(س)

* لمعرفة القيمة نعوض في ق(س)

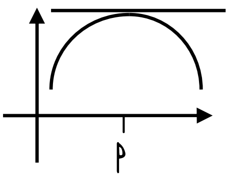
* كل قيمة عظمى قصوى مطلقة محلية إلا الطرف مطلق فقط

* الطرف يلغى إذا كان محلي أو مفتوح

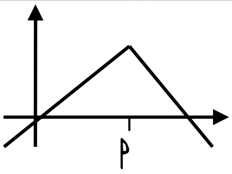
أولاً النقط الحرجة :

الحرجة من رسم ق(س)

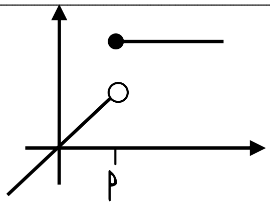
١) قَ(أ) = ٠
مماس أفقي



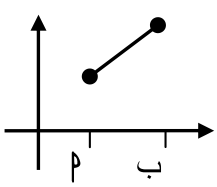
٢) قَ(أ) غير موجودة
رأس مدبب



٣) قَ(أ) غير موجودة
عدم اتصال



٤) حرجة عند س = أ ، ب
أطراف



٥) ق(س) = ٨ جد النقط الحرجة :

الحل : قَ(س) = ٠ (كل قيم س حرجة)

الحرجة (-∞ ، ∞)

---

٦) ق(س) = [$\frac{\text{س}}{٢}$] ، س ∈ [-١ ، ١٠] جد قيم س الحرجة :

الحل : قيم س الحرجة [-١ ، ١٠]

---

٧) جد النقط الحرجة لكل من الاقترانات التالية :

ق(س) = س^{٢} - ٦س + ٥

الحل : قَ(س) = ٢س – ٦

٢س – ٦ = ٠ ⟵ ٢س = ٦ ⟵ $\boxed{\text{س} = ٣}$

النقط الحرجة (٣ ، -٤)

---

٨) ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} ، س ∈ [-٢ ، ٣]

الحل : قَ(س) = ٦س – ٣س^{٢}

٦س – ٣س^{٢} = ٠ ⟵ ٣س(٢ – س) = ٠

س = <u>٠ ، ٢</u> ، <u>-٢ ، ٣</u>

أصفار المشتقة ، أطراف

النقط الحرجة (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٠) ، (-٢ ، ٢٠)

---

٩) ق(س) = س^{٣} - ١٢س + ١ ، س ∈ [-٣ ، ٣)

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} - ١٢

٣س^{٢} - ١٢ = ٠ ⟵ ٣س^{٢} = ١٢ ⟵ $\boxed{\text{س}^{٢} = ٤}$

س = -٢ ، ٢

قيم س الحرجة = {٢ ، -٢ ، -٣ ، ~~٣~~} طرف مفتوح

النقط الحرجة (٢ ، -١٥) ، (-٢ ، ١٧) ، (-٣ ، ١٠)

---

١٠) ق(س) = $\sqrt[٣]{٤ - \text{س}^{٢}}$ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

الحل : ق(س) = (٤ – س^{٢})$^{\frac{١}{٣}}$

قَ(س) = $\frac{١}{٣}$ (٤ – س^{٢})$^{\frac{-٢}{٣}}$ × -٢س = $\frac{-٢\text{س}}{٣(٤ - \text{س}^{٢})^{\frac{٢}{٣}}}$

* <u>أصفار البسط</u> = -٢س = ٠ ⟵ $\boxed{\text{س} = ٠}$
* <u>أصفار المقام</u> = ٤ – س^{٢} = ٠ ⟵ $\boxed{\text{س} = ±٢}$
* <u>الأطراف</u> : -٣ ، ٣

(٠ ، $\sqrt[٣]{٤}$) ، (٢ ، ٠) ، (-٢ ، ٠) ، (-٣ ، $\sqrt[٣]{-٥}$) ، (٣ ، $\sqrt[٣]{-٥}$)

---

١١) ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ ، س ∈ [-٢ ، ٢]

الحل : ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$

قَ(س) = $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{-١}{٣}}$ × -٢س = $\frac{٢}{٣\ \text{س}^{\frac{١}{٣}}}$

* $\boxed{\text{س} = ٠}$
* الأطراف : س = -٢ ، س = ٢

(٠ ، ٠) (٢ ، $\sqrt[٣]{٤}$) (-٢ ، $\sqrt[٣]{٤}$)

---

١٢) ق(س) =
- س^{٢} ، س < ٢
- ٤س ، س ≥ ٢

الحل : قَ(س) =
- ٢س ، س < ٢
- ٤ ، س > ٢
- غير موجودة ، س = ٢

* ٢س = ٠ ⟵ ~~س = ٠~~ (خارج مجال القاعدة الأولى)
* ~~٤ = ٠~~
* ق(س) غير متصل عند س = ٢ ⟵ لذلك قَ(٢) غير موجودة

∴ النقط الحرجة (٢ ، ٨)

---

١٣) ق(س) =
- س^{٢} + ١ ، -٢ ≤ س ≤ ١
- ٢س ، ١ ≤ س ≤ ٢

الحل : قَ(س) =
- ٢س ، -٢ < س < ١
- ٢ ، ١ < س < ٢
- غير موجودة ، س = -٢ ، ٢
- ٢ ، س = ١

* ٢س = ٠ ⟵ $\boxed{\text{س} = ٠}$ ✓ (ضمن المجال للقاعدة الأولى)
* ~~٢ = ٠~~
* ق(س) متصل عند س = ١ ⟵ قَ(١) = ٢ لا تعتبر حرجة

النقط الحرجة (-٢ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٠ ، ١)

١٤) $ق(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٣} + ١}$ ، $س \neq -١$:

الحل : $ق'(س) = \frac{(س^{٣} + ١)(٣س^{٢}) - (س^{٣} - ١)(٣س^{٢})}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{٣س^{٥} + ٣س^{٢} - ٣س^{٥} + ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{٦س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

* أصفار البسط : $\boxed{س = ٠}$
* أصفار المقام : $\cancel{س = -١}$ خارج المجال
* النقط الحرجة : (٠ ، -١)

١٥) جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = |س^{٢} - ٢س|$

$س \in [١ ، ٣]$:

الحل :

١٦) $ق(س) = س^{٢}|س - ١|$ ، $س \in [-٣ ، ٢]$:

الحل : $ق(س) = \begin{cases} -س^{٣} + س^{٢} & ، -٣ \le س \le ١ \\ س^{٣} - س^{٢} & ، ١ < س \le ٢ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -٣س^{٢} + ٢س & ، -٣ < س < ١ \\ ٣س^{٢} - ٢س & ، ١ < س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، س = -٣ ، ٢ ، ١ \end{cases}$

* الأطراف : س = -٣ ، ٢
* $-٣س^{٢} + ٢س = ٠ \longleftarrow س(-٣س + ٢) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = \frac{٢}{٣}$

* $٣س^{٢} - ٢س = ٠ \longleftarrow س(٣س - ٢) = ٠$

$\cancel{س = ٠}$ ، $\cancel{س = \frac{٢}{٣}}$

* ق'(١) غير موجودة ⟵ س = ١

النقط الحرجة : (-٣ ، ٣٦) ، (٢ ، ٤) ، (٠ ، ٠) ، $(\frac{٢}{٣} ، \frac{٤}{٢٧})$ ، (١ ، ٠)

١٧) إذا كان $ق(س) = م س^{٣} - ٩س^{٢}$ ، حيث م عدد ثابت وكان لهذا الاقتران نقطة حرجة عند س = ٢ جد م :

الحل : $ق'(س) = ٣م س^{٢} - ١٨س$

$ق'(٢) = ١٢م - ٣٦ = ٠ \longleftarrow ١٢م = ٣٦ \longleftarrow \boxed{م = ٣}$

١٨) جد قيم أ ، ب التي تجعل للاقتران
$ق(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س$ نقطتين حرجتين عند
س = -١ ، س = ٣ :

الحل : $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب س$

$ق'(-١) = ٠ \longleftarrow ٣ - ٢أ + ب = ٠ \longleftarrow -٢أ + ب = -٣$

$ق'(٣) = ٠ \longleftarrow ٢٧ + ٦أ + ب = ٠ \longleftarrow ٦أ + ب = -٢٧$

$٢أ - ب = ٣$

$٦أ + ب = -٢٧$

$٨أ = -٢٤ \longleftarrow \boxed{أ = -٣}$

$٦ + ب = -٣ \longleftarrow \boxed{ب = -٩}$

***التزايد والتناقص وإشارة المشتقة :**

ق'(س)

موجبة (الاقتران متزايد) — سالبة (الاقتران متناقص)

قاعدة هامة :

إذا لم تعطى ق'(س) نشتق لكي نجدها

أوجد فترات التزايد والتناقص لما يلي :

١) ق'(س) = ٧

+ + + + + + + + + + +

-∞ ..... ∞

الاقتران متزايد (-∞ ، ∞)

٢) ق'(س) = -٥

- - - - - - - - - - - - - - -

-∞ ..... ∞

الاقتران متناقص (-∞ ، ∞)

٣) ق'(س) = س - ٧

- - - - - ٧ + + + + +

-∞ ..... ∞

س – ٧ = ٠ ⟵ س = ٧

∴ ق متزايد [٧ ، ∞) ، ق متناقص (-∞ ، ٧]

٤) ق'(س) = ٢ - س

+ + + + ٢ - - - - - - -

-∞ ..... ∞

٢ - س = ٠ ⟵ س = ٢

∴ ق متزايد (-∞ ، ٢] ، ق متناقص [٢ ، ∞)

٥) ق'(س) = (س – ١)(س – ٣)

+ + + + + ١ - - - - - - - ٣ + + + + +

∴ ق متزايد [٣ ، ∞) ، (-∞ ، ١] ، ق متناقص [١ ، ٣]

٦) ق'(س) = (٧ - س)(س – ٤)

- - - - - - - ٤ + + + + + ٧ - - - - - - - -

∴ ق متناقص [٧ ، ∞) ، (-∞ ، ٤] ، ق متزايد [٤ ، ٧]

٧) ق'(س) = (س – ٣)^{٢}

+ + + + + + + + + + +

∴ ق(س) متزايد (-∞ ، ∞)

٨) ق'(س) = -(٥ - س)^{٢}

ق'(س)

- - - - - - - - - - - - - - -

∴ ق(س) متناقص في الفترة (-∞ ، ∞)

٩) ق'(س) = س^{٢}

+ + + + + + + + + + +

∴ ق(س) متزايد (-∞ ، ∞)

١٠) ق'(س) = (س – ٢)$^{\frac{٢}{٣}}$

+ + + + + + + + + + +

∴ ق(س) متزايد (-∞ ، ∞)

١١) ق'(س) = (٥ - س)$^{\frac{٢}{٧}}$

+ + + + + + + + + + +

∴ ق(س) متزايد (-∞ ، ∞)

١٢) ق'(س) = س^{٢} + ٥

عبارة لا تحلل

+ + + + + + + + + + +

∴ ق(س) متزايد (-∞ ، ∞)

١٣) ق'(س) = -س^{٢} - ٣

ق'(س) = -(س^{٢} + ٣)

- - - - - - - - - - - - - - -

∴ ق(س) متناقص (-∞ ، ∞)

١٤) ق'(س) = (س – ٣)^{٣}

- - - - - - ٣ + + + + +

∴ ق متزايد [٣ ، ∞) ، ق متناقص (-∞ ، ٣]

١٥) ق'(س) = (س – ٥)^{٢}(س – ٣)

تهمل الإشارة موجبة دائماً

- - - - - - ٣ + + + + +

∴ ق متزايد [٣ ، ∞) ، ق متناقص (-∞ ، ٣]

١٦) ق'(س) = (٧ - س)(س – ٥)^{٢}

+ + + + +   - - - - - - -

٧

∴ ق متزايد (-∞ ، ٧] ، ق متناقص [٧ ، ∞)

---

١٧) ق'(س) = (س - ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ (س – ٥)$^{\frac{٢}{٣}}$

← تهمل (أحدهما زوجي)

- - - - - - + + + + +

٢

∴ ق متزايد [٢ ، ∞) ، متناقص (-∞ ، ٢]

---

١٨) ق'(س) = (س - ٥) (س^{٢} + ٤)

← لا تحلل

س – ٥ = ٠ ← س = ٥

- - - - - -   + + + + +

٥

∴ ق متزايد [٥ ، ∞) ، متناقص (-∞ ، ٥]

---

١٩) ق'(س) = (س - ٢)(س - ١) (٤ – س)

+ + + + - - - -   + + + +   - - - - -

١   ٢   ٤

∴ ق متزايد (-∞ ، ١]،[٢ ، ٤]

ق متناقص [١ ، ٢]،[٤ ، ∞)

---

٢٠) ق'(س) = (س - ٢)^{٢} (س - ١)

- - - - - -   + + + + +

١

∴ ق متزايد [١ ، ∞) ، متناقص (-∞ ، ١]

---

٢١) ق'(س) = $\frac{\text{س - ١}}{\text{س - ٢}}$ ، س ≠ ٢

الحل :

---

٢٢) ق'(س) = $\frac{\text{٥ - س}}{\text{س - ١٠}}$ ، س ≠ ١٠

الحل :

---

٢٣) ق'(س) = (س - ١)(س – ٢)(س – ٣)

- - - -   + + +   - - - -   + + + +

١   ٢   ٤

∴ ق متزايد [١ ، ٢] ، [٣ ، ∞)

∴ ق متناقص (-∞ ، ١] ، [٢ ، ٣]

هام جداً :

في الاقتران التربيعي

له جذران	له جذر واحد	ليس له جذور
(س - م)(س - ب)	(س - م)^{٢}	س^{٢} + م^{٢}

---

٢٤) ق'(س) = (س - ٥) (س – ٢)^{٢}

← تهمل

س – ٥ = ٠ ← س = ٥

- - - - - -   + + + + +

٥

∴ ق متزايد [٥ ، ∞) ، متناقص (-∞ ، ٥]

---

* أوجد مجالات التزايد والتناقص في الأمثلة التالية جميعها :

٢٥) ق(س) = ٥س + ١

ق'(س) = ٥

+ + + + + + + + + + +

∴ ق متزايد في (-∞ ، ∞)

---

٢٦) ق(س) = -٧س + ٤

ق'(س) = -٧

- - - - - - - - - - - - - - -

∴ ق متناقص في (-∞ ، ∞)

---

٢٧) ق(س) = س^{٢} + ١

ق'(س) = ٢س ← ٢س = ٠ ← س = ٠

ق'   - - - - - -   + + + + +

٠

∴ ق متزايد [٠ ، ∞) ، ق متناقص (-∞ ، ٠]

٢٨) ق(س) = - س^{٢} + ٦س + ٧

ق'(س) = -٢س + ٦ ⟵ س = ٣

+++++ -------
٣

∴ ق(س) متزايد (-∞ ، ٣] ، متناقص [٣ ، ∞)

---

٢٩) ق(س) = س^{٣} - ٣س + ٢

ق'(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٠ ⟵ س^{٢} = ١ ⟵ س = ±١

+++++ ------- +++++
-١ ١

∴ ق متزايد [١ ، ∞) ، (-∞ ، -١]

، ق متناقص [-١ ، ١]

---

٣٠) ق(س) = (س – ٥)^{٣}

ق'(س) = ٣(س – ٥)^{٢}

+++++++++++

∴ ق متزايد في (-∞ ، ∞)

---

٣١) ق(س) = (٤ – ٧)^{٧}

ق'(س) = ٧(٤ – س)^{٦} × -١ = -٧(٤ – س)^{٦}

∴ ق متناقص في (-∞ ، ∞)

---

٣٢) ق(س) = س^{٤} - ٢س^{٢}

ق'(س) = ٤س^{٣} - ٤س = ٠

٤س(س^{٢} - ١) = ٠ ⟵ س = ٠

س^{٢} - ١ = ٠ ⟵ س = ±١

----- ++++ ----- ++++
-١ ٠ ١

∴ ق متزايد [-١ ، ٠] ، [١ ، ∞)

ق متناقص (-∞ ، -١] ، [٠ ، ١]

---

٣٣) ق(س) = س^{٤} - $\frac{٤}{٣}$ س^{٣}

ق'(س) = ٤س^{٣} - ٤س^{٢} = ٠

٤س^{٢}(س – ١) = ٠ ⟵ ٤س^{٢} تهمل للإشارة

س – ١ = ٠ ⟵ س = ١

------ +++++
١

∴ ق متزايد [١ ، ∞) ، متناقص (-∞ ، ١]

---

٣٤) ق(س) = (س^{٢} - ١)$^{\frac{١}{٣}}$

ق'(س) = $\frac{١}{٣}$ (س^{٢} - ١)$^{\frac{-٢}{٣}}$ × ٢س = $\frac{٢س}{٣(س^{٢} - ١)^{\frac{٢}{٣}}}$

٢س: ------ +++++
٠

٣(س^{٢} - ١)$^{\frac{٢}{٣}}$: ++++++++++

ق': ------ +++++
٠

∴ ق متزايد [٠ ، ∞) ، ق متناقص (-∞ ، ٠]

---

٣٥) ق(س) = (س^{٢} - ١)$^{\frac{٢}{٣}}$

ق'(س) = $\frac{٢}{٣}$ (س^{٢} - ١)$^{\frac{-١}{٣}}$ × ٢س = $\frac{٤س}{٣(س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٣}}}$

٤س: ------ +++++
٠

٣(س^{٢} - ١)$^{\frac{١}{٣}}$: ++++ ------ ++++
-١ ١

ق': ----- ++++ ----- ++++
-١ ٠ ١

∴ ق متزايد [-١ ، ٠] ، [١ ، ∞)

ق متناقص (-∞ ، -١] ، [٠ ، ١]

---

* قاعدة : إذا كان ق(س) متصل فإن كل الفترات مغلقة

---

٣٦) إذا كان ق(س) = { ٥س ، س ≤ ١ ؛ - س + ٦ ، س > ١ }

أوجد مجالات التزايد والتناقص :

الحل : ق'(س) = { ٥ ، س < ١ ؛ -١ ، س > ١ }

متصل عند س = ١

------ +++++
١

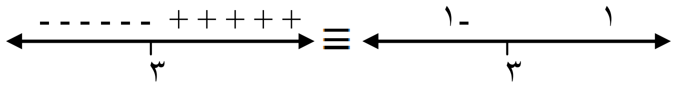
∴ ق متزايد [١ ، ∞) ، ق(س) متناقص (-∞ ، ١]

٣٧) إذا كان ق(س) = |س - ٣| ، أوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل : <u>أولاً نعيد تعريف الاقتران ق(س)</u>

ق(س) = { س - ٣ ، س > ٣
{ - س + ٣ ، س ≤ ٣

قَ(س) = { ١ ، س > ٣
{ -١ ، س < ٣
{ غ.م ، س = ٣



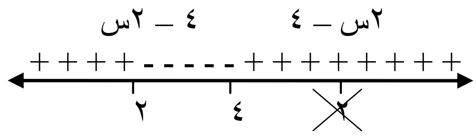
∴ ق متزايد [٣ ، ∞) ، ق(س) متناقص (-∞ ، ٣]

٣٨) إذا كان ق(س) = س|س - ٤| ، أوجد فترات التزايد والتناقص

الحل :

ق(س) = { س^{٢} - ٤س ، س ≥ ٤
{ ٤س – س^{٢} ، س < ٤

قَ(س) = { ٢س - ٤ ، س > ٤
{ ٤ – ٢س ، س < ٤



∴ ق متزايد (-∞ ، ٢] ، [٤ ، ∞)
ق متناقص [٢ ، ٤]

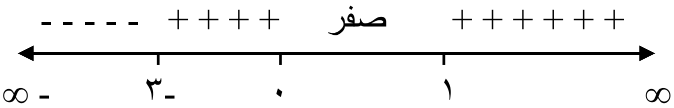
٣٩) إذا كان ق(س) = { س^{٢} + ٦س + ٤ ، س ≤ ٠
{ [س + ٤] ، ٠ < س < ١
{ |٣س + ١| ، س ≥ ١

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق على مجاله :

الحل:

ق(س) = { س^{٢} + ٦س + ٤ ، س ≤ ٠
{ ٤ ، ٠ < س < ١
{ ٣س + ١ ، س ≥ ١

قَ(س) = { ٢س + ٦ ، س < ٠
{ ٠ ، ٠ < س < ١
{ ٣ ، س > ١
{ غير موجودة ، س = ٠ ، ١



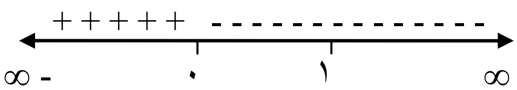
∴ ق متناقص (-∞ ، -٣]
ق متزايد [-٣ ، ٠] ، [١ ، ∞)
ق ثابت [٠ ، ١]

٤٠) ق(س) = { ٣ - س^{٢} ، س ≤ ١
{ $\frac{٢}{س}$ ، س > ١

حدد فترات التزايد :

الحل :

قَ(س) = { -٢س ، س < ١
{ $\frac{-٢}{س^{٢}}$ ، س > ١



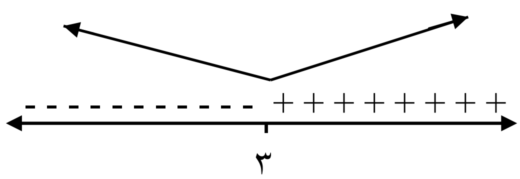
∴ ق متزايد (-∞ ، ٠]

<u>القيم القصوى</u>

أوجد القيم القصوى ونقط القيم القصوى لكل مما يلي :

١) ق(س) = س^{٢} - ٦س + ١٠

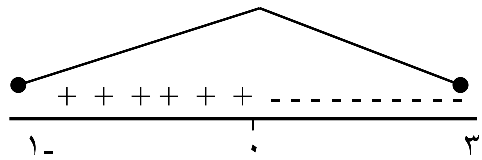
الحل : قَ(س) = ٢س – ٦



(٣ ، ق(٣)) = (٣ ، ١) صغرى مطلقه محلية

٢) ق(س) = - س^{٢} + ٥ ، س ∈ [-١ ، ٣] :

الحل : قَ(س) = -٢س

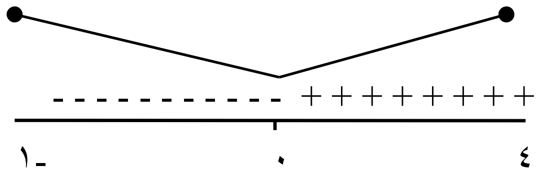


(٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٥) عظمى مطلقة محلية

(٣ ، ق(٣)) = (٣ ، -٤) صغرى مطلقة

٣) ق(س) = س^{٢} + ٧ ، س ∈ [-١ ، ٤] :

الحل : قَ(س) = ٢س = ٠ ⟵ س = ٠

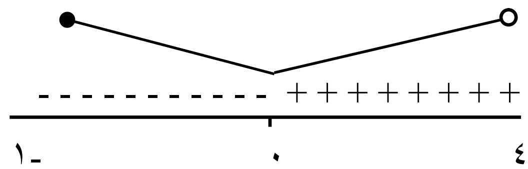


عند س = ٠ ، قيمة صغرى مطلقة (٠ ، ٧)

عند س = ٤ ، قيمة عظمى مطلقة (٤ ، ٢٣)

٤) ق(س) = س^{٢} + ٣ ، س ∈ [-١ ، ٥) :

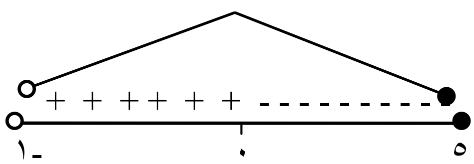
الحل : قَ(س) = ٢س = ٠ ⟵ س = ٠



عند س = ٠ ، قيمة صغرى مطلقة محلية هي ق(٠) = ٣

٥) ق(س) = - س^{٢} + ٤ ، س ∈ (-١ ، ٥] :

الحل : قَ(س) = -٢س = ٠ ⟵ س = ٠

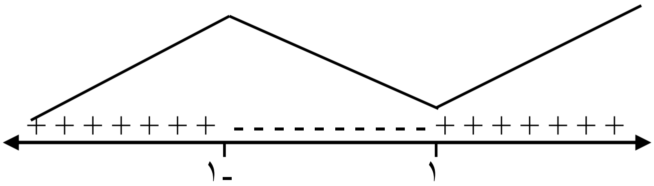


عند س = ٠ ، قيمة عظمى مطلقة هي ق(٠) = ٤

عند س = ٥ ، قيمة صغرى مطلقة هي ق(٥) = -٢١

٦) ق(س) = س^{٣} - ٣س ، أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى للاقتران :

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٠ ⟵ س^{٢} = ١ ⟵ س = ±١



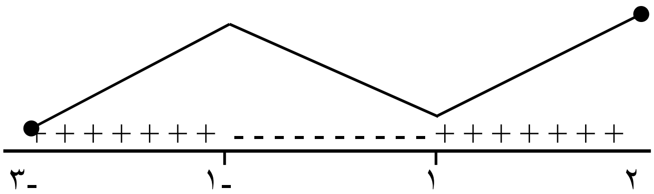
عند س = -١ ، قيمة عظمى محلية وهي ق(-١) = ٢

عند س = ١ ، قيمة صغرى محلية وهي ق(١) = -٢

ق(س) متزايد (- ∞ ، -١] ، [١ ، ∞) ، متناقص [-١ ، ١]

٧) إذا كان ق(س) = س^{٣} - ٣س ، س ∈ [-٣ ، ٢] أوجد القيم القصوى :

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٠ ⟵ س = ±١



عند س = ٢ ، قيمة عظمى هي ق(٢) = ٢ (مطلقة)

عند س = -١ ، قيمة عظمى وهي ق(-١) = ٢ (مطلقة)

عند س = ١ ، قيمة صغرى وهي ق(١) = -٢ (محلية)

عند س = -٣ ، قيمة صغرى وهي ق(-٣) = - ١٨ (مطلقة)

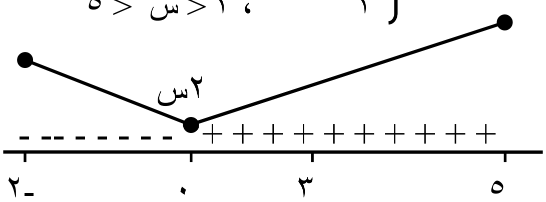
٨) إذا كان

ق(س) = { س^{٢} + ١ ، -٢ ≤ س < ٣ ؛ ٣س + ١ ، ٣ ≤ س ≤ ٥ }

جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) :

الحل :

قَ(س) = { ٢س ، -٢ < س < ٣ ؛ ٣ ، ٣ < س < ٥ }



(٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ١) صغرى مطلقة محلية

(٥ ، ق(٥)) = (٥ ، ١٦) عظمى مطلقة

٩) ق(س) = |(س − ١)^{٣}| ، س ∈ [-١ ، ٣] :

الحل : (س − ١)^{٣} (١ − س)^{٣}

-١ ١ ٣

ق(س) = { (س − ١)^{٣} ، ١ ≤ س ≤ ٣
{ (١ - س)^{٣} ، -١ ≤ س < ١

قَ(س) = { ٣(س - ١)^{٢} ، ١ < س < ٣
{ -٣(١ - س)^{٢} ، -١ < س < ١

- - - - - - - - - - - - + + + + + + + + +

-١ ١ ٣

(١ ، ق(١)) = (١ ، ٠) صغرى مطلقة محلية

(٣ ، ق(٣)) = (٣ ، ٨) عظمى مطلقة

إيجاد القيم القصوى باستخدام إشارة المشتقة الثانية

* **إذا كان** قَ(م) = ٠ **وكان** :

قً(م) موجبة فإن لِـ ق قيمة صغرى عند م

قً(م) سالبة فإن لِـ ق قيمة عظمى عند م

وغير ذلك يفشل الاختبار

١٠) إذا كان ق(س) = س^{٣}- ٣س ، أوجد القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية :

الحل :

قَ(س) =٣س^{٢}- ٣ = ٠ ⟵ س = ±١

قً(س) = ٦س

قً(١) = ٦ > ٠ ، عند س = ١ صغرى ، القيمة القصوى

ق(١) = -٢

قً(-١) = -٦ < ٠ ، عند س = -١ عظمى ، القصوى

ق(-١) = ٢

١١) ق(س) = س^{٢}- ٦س + ٥ ، أوجد القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية :

الحل : <u>نجد أصفار المشتقة الأولى</u>

قَ(س) =٢س - ٦ = ٠ ⟵ ٢س = ٦ ⟵ س = ٣

قً(س) = ٢ > ٠

عند س = ٣ ، قيمة صغرى هي ق(٣) = -٤

١٢) إذا كان قَ(٥) = ٠ ، وعلمت أن قً(س) = ٦س ، فإنه يوجد للاقتران عند س = ٥ قيمة :

م) عظمي ب) صغرى ج) م+ ب ى) انعطاف

١٣) إذا علمت أن ق(١) = ٥ ، قَ(١) = ٠ ، قً(١) = ١٠ ، فإن النقطة (١ ، ٥) هي :

م) عظمي ب) صغرى

ج) انعطاف ى) صغرى وحرجة

إذا كانت المشتقة الأولى صفر والثانية سالبة فهي عظمى

وإذا كانت الأولى صفر والثانية موجبة فهي صغرى

١٤) ق(١) = ٢ ، قَ(١) = ٠ ، قً(١) = ٧ ، صغرى حرجة :

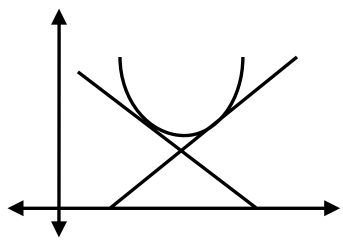
أي أن النقطة (١، ٢) صغرى حرجة

١٥) ق(١) = ٥ ، قَ(١) = ٠ ، قً(١) = -١٠ :

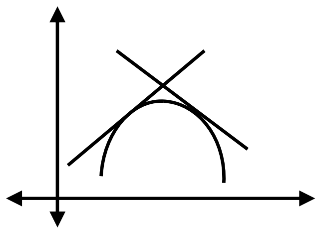
∴ (١، ٥) عظمى حرجة

* <u>مجالات التقعر :</u>

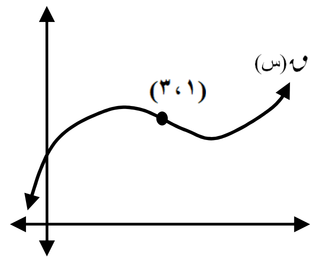
⟸ فوق المماس :
ق مقعر للأعلى (- ∞ ، ∞)
لأنه يقع فوق جميع مماساته



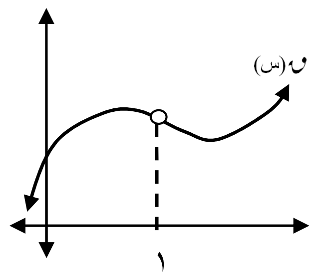
⟸ تحت المماس :
ق مقعر للأسفل (- ∞ ، ∞)



ق مقعر للأعلى [١ ، ∞)
ق مقعر للأسفل ب(- ∞ ، ١]
ق متصل ومنعطف عند س = ١
نقطة الانعطاف هي (١ ، ٣)



لا توجد نقطة انعطاف



حتى يكون هناك نقطة انعطاف عند س = ١
يجب أن يكون ق متصل عند س = ١

<u>هام للغاية :</u>

عند وجود نقطة انعطاف عند نقطة معينة فيجب أن يكون الاقتران متصل عند تلك النقطة

* <u>شروط نقطة الانعطاف</u>

* يشترط لوجود نقطة انعطاف أن يغير الاقتران من تقعره وأن يكون متصل عند نقطة الانعطاف

* <u>إشارة المشتقة الثانية :</u>

يستفاد منها في تحديد مجالات التقعر للأعلى والتقعر للأسفل ونقط الانعطاف وزوايا الانعطاف وذلك حسب الخطوات التالية :

١) نجد المشتقة الثانية ونساويها بالصفر لكي نجد الجذور

٢) نعين على خط الأعداد أصفار ق''، قيم س التي تجعل ق(س) غير موجودة والأطراف

٣) نضع الإشارة وذلك بالتعويض في ق''

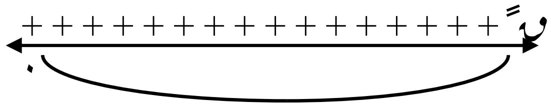
٤) نرسم منحنيات التقعر ونحدد نقط الانعطاف

بدون لت وعجن: ق'' موجبة ⟵ ق مقعر للأعلى
ق'' سالبة ⟵ ق مقعر للأسفل

* أوجد مجالات التقعر ونقاط الانعطاف للاقترانات التالية جميعها :

١) إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٥

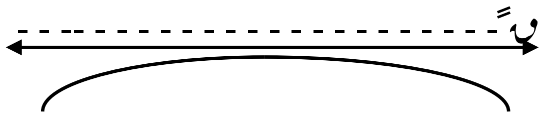
ق'(س) = ٢س ⟵ ق''(س) = ٢



ق مقعر للأعلى في الفترة (- ∞ ، ∞)

٢) إذا كان ق(س) = - س^{٢} + ٣س + ٥

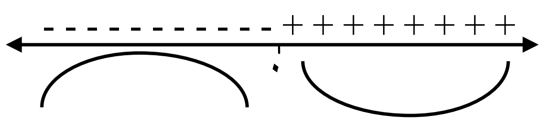
ق'(س) = -٢س + ٥ ⟵ ق''(س) = -٢



ق مقعر للأسفل في الفترة (- ∞ ، ∞)

٣) ق(س) = س^{٣} + ٥

الحل : ق'(س) = ٣س^{٢} ⟵ ق''(س) = ٦س



ق مقعر للأعلى [٠ ، ∞) ، مقعر للأسفل (- ∞ ، ٠]

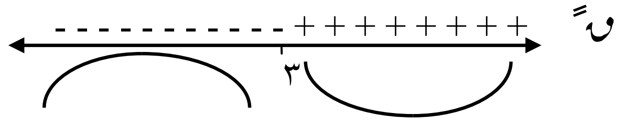
ق متصل عند س = ٠ ، ق منعطف عند س = ٠

نقطة الانعطاف : (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٥)

٤) ق(س) = (س – ٣)^{٣}

الحل : قَ(س) = ٣(س – ٣)^{٢} ⟵ قً(س) = ٦(س – ٣)

س – ٣ = ٠ ⟵ س = ٣



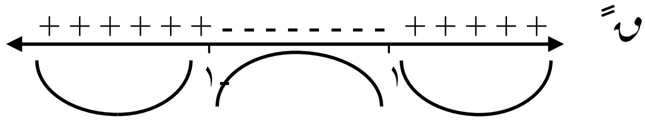
ق مقعر للأعلى [٣ ، ∞) ، مقعر للأسفل (- ∞ ، ٣]

نقطة الانعطاف : (٣ ، ق(٣)) = (٣ ، ٠)

٥) ق(س) = س^{٤} - ٦س^{٢}

الحل : قَ(س) = ٤س^{٣} - ١٢س

قً(س) = ١٢س^{٢} - ١٢ = ٠ ⟵ س = ±١



ق مقعر للأعلى [١ ، ∞) ، (- ∞ ، -١]

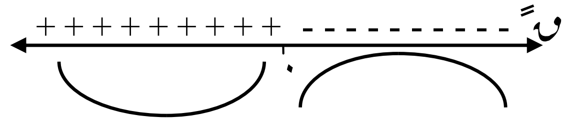
ق مقعر للأسفل [-١ ، ١]

نقط الانعطاف :

(١ ، ق(١)) = (١ ، -٥) ، (-١ ، ق(-١)) = (-١ ، -٥)

٦) ق(س) = س$^{\frac{٣}{٥}}$ ، س ∈ ح :

الحل : قَ(س) = $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{-٢}{٥}}$ ⟵ قً(س) = $\frac{-٦}{٢٥}$ س$^{\frac{-٧}{٥}}$



ق مقعر للأعلى (- ∞ ، ٠] ، مقعر للأسفل [٠ ، ∞)

نقطة الانعطاف : (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)

٧) جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق حيث :

ق(س) = س^{٤} - ٦س^{٣} + ١٢س^{٢} ، س ∈ [-٥ ، ٥] :

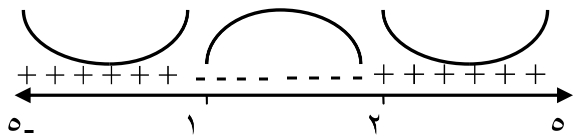
الحل : قَ(س) = ٤س^{٣} - ١٨س^{٢} + ٢٤س

قً(س) = ١٢س^{٢} - ٣٦ س + ٢٤

س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠

(س – ٢)(س – ١)

س = ٢ ، ١



ق(س) مقعر للأعلى [-٥ ، ١] ، [٢ ، ٥]

ق(س) مقعر للأسفل [١ ، ٢]

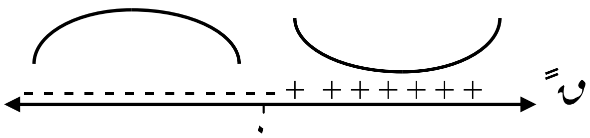
(١ ، ق(١)) ، (٢ ، ق(٢)) نقط انعطاف

٨) حدد فترات التقعر للأعلى وللأسفل لكل من المنحنيات الآتية :

أ) ق(س) = س + $\frac{٤}{س}$

الحل : قَ(س) = ١ - $\frac{٤}{س^{٢}}$

قً(س) = $\frac{٨}{س^{٣}}$



ق مقعر للأعلى (- ∞ ، ٠]

ق مقعر للأسفل [٠ ، ∞)

ب) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س < ٢ \\ ٥ - س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

الحل : $ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، س < ٢ \\ -١ & ، س > ٢ \end{cases}$

$ق''(س) = \begin{cases} ٢ & ، س < ٢ \\ ٠ & ، س > ٢ \end{cases}$

ق(س) مقعر للأعلى $(-\infty ، ٢]$

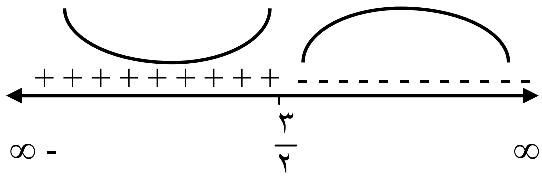
جـ) $هـ(س) = \left(\frac{س - ١}{س}\right)^{٢}$

الحل : $هـ(س) = (١ - \frac{١}{س})^{٢}$

$هـ'(س) = ٢(١ - \frac{١}{س}) \times (\frac{١}{س^{٢}})$

$هـ'(س) = ٢(\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}})$

$هـ''(س) = ٢(\frac{-٢}{س^{٣}} + \frac{٣}{س^{٤}}) = ٢(\frac{-٢س + ٣}{س^{٤}})$



ق مقعر للأسفل $[\frac{٣}{٢} ، \infty)$

ق مقعر للأعلى $(-\infty ، \frac{٣}{٢}]$

٩) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، $هـ(س) = س^{\frac{١}{٣}}$ ، أجب عما يأتي :

أ) قارن مجالات التقعر لكل من الاقترانين ق ، هـ

ب) جد النقط التي يكون عندها كل من الاقترانين ق ، هـ غير متصل

جـ) جد نقط الإنعطاف لكل من ق ، هـ إن وجدت :

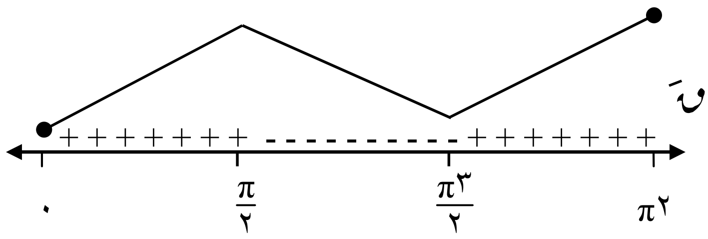
الحل :

*** إشارة المشتقة الأولى والثانية والقيم القصوى للاقترانات الدائرية :**

١) إذا كان ق(س) = جـاس ، س ∈ [٠ ، ٢π] ، جد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى العظمى والصغرى ومجالات التقعر ونقط الانعطاف :

الحل : $\boxed{\text{ق}َ(\text{س}) = \text{جتاس}}$

جتـاس = ٠ ⟵ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$



ق(س) متزايد [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، [$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π]

ق(س) متناقص [$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

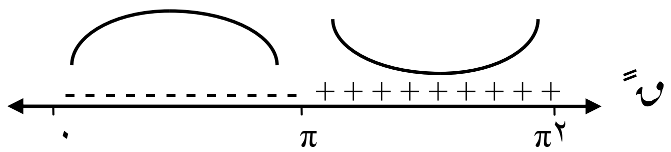
س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ⟵ صغرى مطلقه محلية ق($\frac{٣\pi}{٢}$) = -١

س = $\frac{\pi}{٢}$ ⟵ عظمى مطلقه محلية ق($\frac{\pi}{٢}$) = ١

قيم س الحرجة { ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٣\pi}{٢}$، ٢π }

$\boxed{\text{ق}ً(\text{س}) = -\text{ جـاس}}$

-جـاس = ٠ ⟵ س = ٠ ، π ، ٢π



ق(س) مقعر للأعلى [π ، ٢π]

ق(س) مقعر للأسفل [٠ ، π]

نقط الانعطاف (π ، ق(π)) = (π ، ٠)

٢) إذا كان ق(س) = جتـا س - $\frac{١}{٣}$ جتـا^{٣}س ،

س ∈ [٠ ، ٢π] ، جد

أ) مجالات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت)

ج) قيم س الحرجة

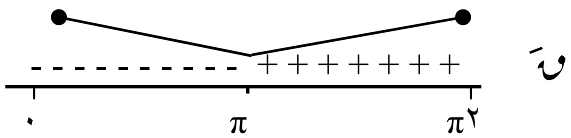
الحل : $\boxed{\text{ق}َ(\text{س}) = -\text{جـاس} + \text{جتـا}^{٢}\text{س جـاس}}$

= - جـاس (١ – جتـا^{٢}س)

$\boxed{\text{ق}َ(\text{س}) = -\text{جـا}^{٣}\text{س}}$

-جـا^{٣}س = ٠ ⟵ س = ٠ ، π ، ٢π

* النقط الحرجة (٠ ، $\frac{٢}{٣}$) ، (π ، $\frac{-٢}{٣}$) ، (٢π ، $\frac{٢}{٣}$)



ق(س) متزايد [π ، ٢π]

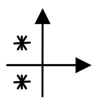
ق(س) متناقص [٠ ، π]

س = π ، صغرى مطلقه محلية وهي ق(π) = $\frac{-٢}{٣}$

س = ٢π ، عظمى مطلقه وهي ق(٢π) = $\frac{٢}{٣}$

س = ٠ ، عظمى مطلقه وهي ق(٠) = $\frac{٢}{٣}$

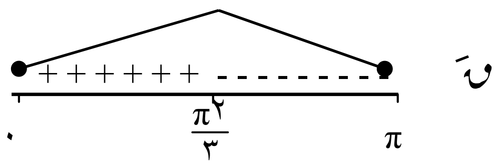
٣) جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س + ٢جـاس ، س ∈ [٠ ، π] :



الحل : $\boxed{\text{ق}َ(\text{س}) = ١ + ٢\text{جتـاس}}$

١ + ٢جتـاس = ٠ ⟵ جتـاس = $\frac{-١}{٢}$

س = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٢\pi}{٣}$



س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ، قيمة عظمى مطلقه محلية

وهي ق($\frac{٢\pi}{٣}$) = $\frac{٢\pi}{٣}$ + $\sqrt{٣}$

س = ٠ صغرى مطلقه ق(٠) = ٠

٤) جد قيم س التي يكون لمنحنى الاقتران ق عندها نقط انعطاف

حيث ق(س) = ٢جاس + $\frac{١}{٢}$ جا٢س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل : ق َ(س) = ٢جتاس + جتا ٢س

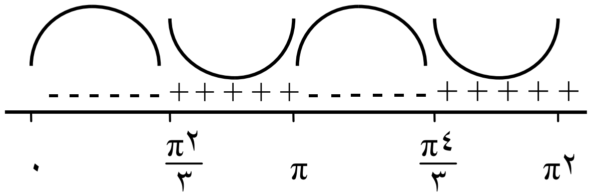
$\boxed{\text{ق ً(س) = ـ ٢جاس – ٢جا ٢س}}$

ـ٢جاس – ٤جاس جتاس = ٠

ـ٢جاس (١ + ٢جتاس) = ٠

جاس = ٠ ⟵ س = ٠ ، π ، ٢π

جتاس = $\frac{-١}{٢}$ ⟵ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$



قيم س عند نقطة الانعطاف : س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ، π ، $\frac{٤\pi}{٣}$

٥) حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) لكل من المنحنيات الآتية :

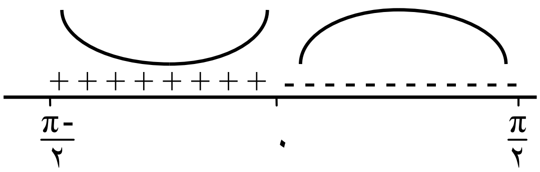
ق(س) = س – ظاس ، س ∈] $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

الحل : ق َ(س) = ١ ـ قا^{٢}س

ق ً(س) = ـ ٢قاس قاس ظاس

$\boxed{\text{ق ً(س) = ـ ٢قا}^{٢}\text{س ظاس} = \frac{\text{ـ٢جا س}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}}$

$\frac{\text{ـ٢جا س}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}$ = ٠ ⟵ $\boxed{\text{س = ٠}}$

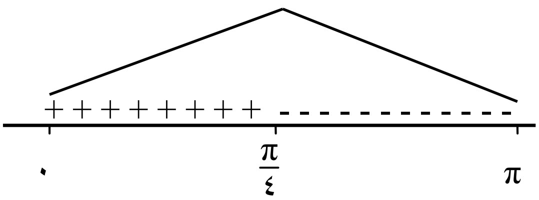


نقط الانعطاف (٠ ، ٠)

٦) ق(س) = جا س + جتا س ، س ∈ [٠ ، π] أوجد مجالات التزايد والتناقص ثم أوجد نقط القيم القصوى :

الحل : ق َ(س) = جتاس – جاس = ٠ ⟵ جتاس = جاس

س = $\frac{\pi}{٤}$ ∈ (٠ ، π) ، س = $\frac{٥\pi}{٤}$ ∉ (٠ ، π)



ق متزايد [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ، متناقص [$\frac{\pi}{٤}$ ، π]

قيم س الحرجة { ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، π }

عند س = π قيمة صغرى مطلقة ق(π) = ـ١

عند س = $\frac{\pi}{٤}$ قيمة عظمى مطلقة محلية ق($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$

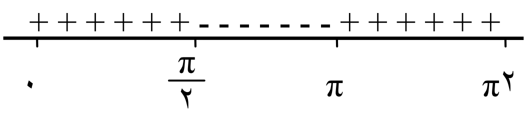
٧) إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{جاس} & ، ٠ \le \text{س} \le \frac{\pi}{٢} \\ ١ + \text{جتاس} & ، \frac{\pi}{٢} < \text{س} \le ٢\pi \end{cases}$$

أوجد مجالات التزايد والتناقص :

الحل :

$$\text{ق َ(س)} = \begin{cases} \text{جتاس} & ، ٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٢} \\ \text{ـجاس} & ، \frac{\pi}{٢} < \text{س} < ٢\pi \\ \text{غ.م} & ، \text{س} = ٠ ، \frac{\pi}{٢} ، ٢\pi \end{cases}$$



ق متزايد [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، [π ، ٢π]

ق متناقص ∈ [$\frac{\pi}{٢}$ ، π]

٨) إذا كان ق(س) = جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π] ، أوجد مجالات التزايد والتناقص ومجالات التقعر ونقط الانعطاف والقيم القصوى :

الحل : ق′(س) = ٢جاس جتاس = جا٢س = ٠

٢س = ٠ ، π ، ٢π ⟵ س = ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، π

\+ + + + + + + + + - - - - - - - - - - - -

٠ $\frac{\pi}{٢}$ π

∴ ق متزايد [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، متناقص [$\frac{\pi}{٢}$ ، π]

لـِ ق قيمة عظمى مطلقة عند النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ١)

قيمة صغرى مطلقة عند النقطة (٠ ، ٠)

قيمة صغرى مطلقة عند النقطة (π ، ٠)

ق″(س) = ٢جتا٢س = ٠ ⟵ ٢س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

⟵ س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$

\+ + + + + + - - - - - - - + + + + + +

٠ $\frac{\pi}{٤}$ $\frac{٣\pi}{٤}$ π

ق مقعر للأعلى [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ، [$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π]

ق مقعر للأسفل [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$]

له نقطتي انعطاف ($\frac{\pi}{٤}$ ، ق($\frac{\pi}{٤}$)) ، ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، ق($\frac{٣\pi}{٤}$))

---

٩) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{جاس}}$ ، س ∈ [٠ ، π] ، أوجد مجالات التزايد والتناقص :

الحل : ق′(س) = $\frac{\text{جتاس}}{٢\sqrt{\text{جاس}}}$

ق′(س) = ٠ ⟵ جتاس = ٠ ⟵ س = $\frac{\pi}{٢}$

ق′(س) غ.م ⟵ جاس = ٠ ⟵ س = ٠ ، π

\+ + + + + + + + + - - - - - - - - - - - -

٠ $\frac{\pi}{٢}$ π

∴ ق متزايد [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، متناقص [$\frac{\pi}{٢}$ ، π]

قيمة صغرى مطلقة : (٠ ، ٠) ، (π ، ٠)

قيمة عظمى مطلقة محلية : ($\frac{\pi}{٢}$ ، ١)

---

١٠) ق(س) = $\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جاس}}$ ، أوجد مجالات التزايد والتناقص حيث س ∈ [٠ ، π] :

الحل :

ق′(س) = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$ س + جاس)$^{-\frac{٢}{٣}}$ ($\frac{١}{٢}$ + جتاس)

ق′(س) = $\frac{\text{٠,٥ + جتاس}}{\text{٣(٠,٥س + جاس)}^{\frac{٢}{٣}}}$

* <u>إشارة البسط :</u>

٠,٥ + جتاس = ٠ ⟵ جتاس = -٠,٥ ⟵ الربع الثاني ، الربع الثالث

س = $\frac{١٢٠}{١٨٠}$ π = $\frac{٢}{٣}$ π ، س = $\frac{٢٤٠}{١٨٠}$ π ∉ المجال

* <u>إشارة المقام : المقام دائماً موجب</u>

∴ ق′ + + + + + + + + - - - - - - - - - - -

٠ $\frac{٢\pi}{٣}$ π

ق متزايد [٠ ، $\frac{٢\pi}{٣}$] ، متناقص [$\frac{٢\pi}{٣}$ ، π]

---

١١) إذا كان ق(س) = أس^{٢}+ ب س + ٧ ، له قيمة عظمى عند النقطة (١ ، ٢) فأوجد أ ، ب :

الحل :

ق(١) = ٢ ⟵ أ + ب + ٧ = ٢ ⟵ أ + ب = -٥ ..... (١)

ق′(١) = ٠ ⟵ ق′(س) = ٢أس + ب ⟵ ٢أ + ب = ٠ .. (٢)

<u>بطرح المعادلتين :</u>

-أ = -٥ ⟵ $\boxed{\text{أ = ٥}}$

بالتعويض ⟵ ٥ + ب = -٥ ⟵ $\boxed{\text{ب = -١٠}}$

---

* <u>ملاحظات خطيرة :</u>

(أ ، ب) ⟵ حرجة ،قصوى ،عظمى ،صغرى ⟵ ق(أ) = ب
ق′(أ) = ٠

(أ ، ب) ⟵ انعطاف لـِ ق(س) ⟵ ق(أ) = ب
ق″(أ) = ٠

(أ ، ب) ⟵ انعطاف أفقي لـِ ق(س) ⟵ ق(أ) = ب
ق′(أ) = ٠
ق″(أ) = ٠

١٢) إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ ، له نقطة حرجة عند (١ ، ٢) ويمر بالنقطة (٢ ، ٥) جد أ ، ب ، جـ :

الحل: ق(١) = ٢ ، قَ(١) = ٠ ، ق(٢) = ٥

ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ ، قَ(س) = ٢أس + ب

أ + ب + جـ = ٢
٤أ + ٢ب + جـ = ٥
٢أ + ب = ٠

٤أ + ٢ب + جـ = ٥
أ + ب + جـ = ٢
٣أ + ب = ٣
٢أ + ب = ٠
أ = ٣

٢أ + ب = ٠
ب = -٦
جـ = ٥

١٣) إذا كان للاقتران ق(س) = م س^{٣} - ٣س^{٢} ، قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، فإن قيمة الثابت م تساوي :

أ) -١ ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

الحل: قَ(س) = ٣م س^{٢} - ٦س

قَ(٢) = ١٢م - ١٢ = ٠

١٢م = ١٢ ← م = ١

١٤) إذا كان ق(س) = م س^{٣} - ٩س^{٢} ، حيث م عدد ثابت وكان لهذا الاقتران نقطة حرجة عند س = ٢ ، فما قيمة م :

أ) ٢ ب) ١,٥ جـ) ٤,٥ د) ٣

الحل: قَ(س) = ٣م س^{٢} - ١٨س

قَ(٢) = ١٢م - ٣٦ = ٠

١٢م = ٣٦ ← م = ٣

١٥) إذا كانت قَ(س) = س^{٢} + م س + ل ، حيث ل ، م ∈ ح ، وكانت النقطة (٢ ، ٥) نقطة انعطاف أفقي لمنحنى ق(س) فإن قيمة الثابت ل هي :

أ) -٤ ب) ٠ جـ) ٢ د) ٤

الحل: ق(٢) = ٥ ، قً(٢) = ٠ ، قَ(٢) = ٠

٤ + ٢م + ل = ٠ ← ٢م + ل = -٤

٢س + م = ٠ ← م = -٤ ← ل = ٤

١٦) عين قاعدة الاقتران ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء (أ ≠ ٠ ، ب ، جـ ، ء أعداد حقيقية) الذي يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٥) ، ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (٢ ، ١) ، هي : ص + ٣س – ٧ = ٠

الحل: ق(١) = ٥ ، ق(٢) = ١ ، قً(٢) = ٠

ص = -٣س + ٧ ← قَ(٢) = -٣

ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء
قَ(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س + جـ
قً(س) = ٦أس + ٢ب

قً(٢) = ٠ ← ١٢أ + ٢ب = ٠ ← ٦أ + ب = ٠

قَ(٢) = -٣ ← ١٢أ + ٤ب + جـ = -٣

ق(١) = ٥ ← أ + ب + جـ + ء = ٥

ق(٢) = ١ ← ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ء = ١

٣ ـ ٤ ← ٧أ + ٣ب + جـ = -٤

٥ ـ ٢ ← ٥أ + ب = ١

٦ ـ ١ ← أ = -١ ← ب = ٦

جـ = -١٥ ← ء = ١٥

١٧) إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ(س) > ٠ ، لكل س ∈ (أ ، ب) ، وكان هـ(س) = ق(س) + س^{٣} ، فأثبت أن هـ(س) متزايد على الفترة [أ ، ب] :

الحل: معطيات : قَ(س) > ٠ ، هـ(س) = ق(س) + س^{٣}

مطلوب : هـ(س) متزايد على [أ ، ب]

البرهان : هـَ(س) = قَ(س) + ٣س^{٢}
موجب موجب

هـَ ++++++++++++++
أ ب

∴ هـ(س) متزايد على [أ ، ب]

١٨) إذا كان ق(س) = -٣ / هـ(س) ، هـ(س) ≠ ٠ ، وكان ق(س) متزايد على ح ، برهن أن هـ(س) متزايدة على ح :

الحل : معطيات : قَ(س) > ٠ ، هـ(س) = -٣ / ق(س)

مطلوب : هـ(س) متزايد على ح

البرهان : هـَ(س) = (٣ × قَ(س)) / (ق(س))^{٢} موجب

هـَ : + + + + + + + + + + + + + +

∴ هـ(س) متزايد على (-∞ ، ∞) على ح

١٩) إذا كان ق(س) اقتران قابل للاشتقاق على (أ ، ب) وكان ل(س) كثير حدود متزايد على [أ ، ب] ، ل(س) ≠ ٠ ، في هذه الفترة وكان قَ(س) = ٧ / ل(س) - ٥س ، أثبت أن منحنى ق(س) مقعر للأسفل في [أ ، ب] :

الحل : قً(س) = $\boxed{(-٧ \times لَ(س)) / (ل(س))^{٢} - ٥}$

سالب

قً : - - - - - - - - - - - - - - - - -
أ ب

∴ ق(س) مقعر للأسفل [أ ، ب]

٢٠) إذا كان ق ، هـ قابلين للاشتقاق على ح فإذاً كان لكل منهما نقطة حرجه عندما س = أ ، فأثبت أن للاقتران (ق × هـ) نقطة حرجة عند (س = أ) :

الحل : قَ(أ) = هـَ(أ) = ٠

(ق × هـ)َ(أ) = ق(أ) × هـَ(أ) + هـ(أ) × قَ(أ)

= ٠ + ٠ = ٠

∴ أ نقطة حرجة للاقتران ق × هـ

٢١) إذا كان ق(س) = ٣(أ – ٢) س^{٢} + ٨س + ٥ ما قيمة أ التي تجعل ق مقعر للأسفل :

الحل : قَ(س) = ٦(أ – ٢) س + ٨

قً(س) = ٦(أ – ٢)

٦أ – ١٢ < ٠ ⟵ ٦أ < ١٢ ⟵ أ < ٢

٢٢) إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٣) ، بين أن للاقتران هـ(س) = (١ – ق(س))^{٣} قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢ ، -٨) :

الحل : معطيات : قً(٢) < ٠ ، ق(٢) = ٣
قَ(٢) = ٠ ، هـ(٢) = -٨

مطلوب : هـً(٢) > ٠

البرهان : هـَ(س) = ٣(١ – ق(س))^{٢} × -قَ(س)

$\boxed{\text{هـَ(س) = -٣قَ(س) (١ – ق(س))}^{٢}}$

هـً(س) = -٣قَ(س) × ٢(١ – ق(س))^{١} × -قَ(س)
+ (١ – ق(س))^{٢} × -٣قً(س)

$\boxed{\text{هـً(س) = ٦(قَ(س))}^{٢}\text{(١ – ق(س)) - ٣قً(س)(١ - ق(س))}^{٢}}$

هـً(٢) = ٦ × ٠ × -٢ – ٣ × سالب × موجب

هـً(٢) = ٠ – ٣ × سالب × موجب = موجب

بما أن هـً(٢) > ٠ ⟵ (٢ ، -٨) صغرى محلية

* كل مطلق محلي ما عدا الأطراف

أمثلة متنوعة :

١) إذا كان ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٣س – ٧ ، جد الفترة التي يكون فيها منحنى ق مقعر للأعلى :

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ١٣

قً(س) = ٦س – ١٢ = ٠ ⟵ س = ٢

- - - - - - - + + + + +
٢

∴ ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [٢ ، ∞)

٢) أوجد القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية (إن وجدت) للاقتران ... ق(س) = جتاس − جاس ، س ∈ [٠ ، π] :

ق′(س) = - جاس − جتاس = ٠

جاس = - جتاس ⟵ ظاس = -١ ⟵ س = $\frac{٣\pi}{٤}$

- - - - - - - - - - + + + + + + + + +

٠ ، $\frac{٣\pi}{٤}$ ، π

يوجد قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$ هي $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

---

٣) إذا كان ق(س) = س^{٣} - $\frac{س^{٤}}{٤}$ ، حيث س ∈ [-١ ، ٤] ،

أوجد ما يلي :

أ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

ب القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران وبين المطلقة منها

جـ فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س)

الحل : ق′(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} = ٠ ⟵ س^{٢}(٣ − س) = ٠

س^{٢} : موجب دائماً ، ٣ − س = ٠ ⟵ س = ٣

ق′ : + + + + + + + + + - - - - - - - - - - - -

-١ ، ٣ ، ٤

أ ق(س) متزايد [-١ ، ٣] ، متناقص [٣، ٤]

ب توجد قيمة عظمى محلية عند س = ٣ هي ٦ $\frac{٣}{٤}$ وهي مطلقة

توجد قيمة صغرى محلية عند س = -١ هي $\frac{-٥}{٤}$ وهي مطلقة

جـ ق″(س) = ٦س − ٣س^{٢} = ٠

٣س(٢ − س) = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = ٢

ق″ : - - - - - - - - - + + + + + - - - - - - - - -

-١ ، ٠ ، ٢ ، ٤

ق مقعر للأعلى [٠ ، ٢]

ق مقعر للأسفل في [-١ ، ٠] ، [٢ ، ٤]

---

٤) إذا كان ق(س) = { س^{٢} - ٤ ، س < ٣ ؛ ٨ − س ، س ≥ ٣ }

أ القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران

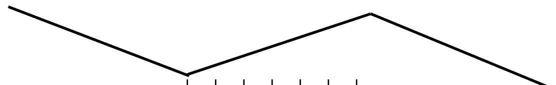
ب فترات التقعر للأعلى والأسفل (إن وجدت)

الحل : ق′(س) = { ٢س ، س < ٣ ؛ -١ ، س > ٣ ؛ غ . م ، س = ٣ }

٢س = ٠ ⟵ س = ٠

- - - - - - - + + + + + +

-∞ ، ٠ ، ٣



∴ ق′ : - - - - - - - - - + + + + + + + - - - - - - - - -

٠ ، ٣

أ يوجد قيمة عظمى محلية عند س = ٣ هي ٥

يوجد قيمة صغرى محلية عند س = ٠ هي -٤

ب ق″(س) = { ٢ ، س < ٣ ؛ ٠ ، س > ٣ ؛ غ . م ، س = ٣ }

ق″ : + + + + + + + + +

٣

∴ ق مقعر للأعلى في الفترة (-∞ ، ٣]

ق غير مقعر للأسفل على أي فترة جزئية

---

٥) إذا كان ق(س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} + ٣}$ أوجد

أ فترات التزايد للاقتران ب فترات التناقص للاقتران

الحل: ق′(س) = $\frac{(س^{٢} + ٣) \times ١ - (س - ١)(٢س)}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$

ق′(س) = $\frac{س^{٢} + ٣ - ٢س^{٢} + ٢س}{(س^{٢} + ٣)^{٢}} = \frac{-س^{٢} + ٢س + ٣}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$

∴ ق′(س) = $\frac{(-س + ٣)(س + ١)}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$

(- س + ٣)(س + ١) = ٠ ⟵ س = ٣ ، -١

ق′ : - - - - - - + + + + + + + - - - - - - - - -

-١ ، ٣

∴ أ) ق متزايد في الفترة [-١ ، ٣]

ب) ق متناقص في (-∞ ، -١] ، [٣ ، ∞)

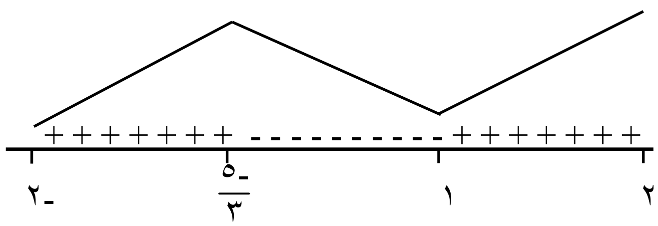
٦) إذا كان ق(س) = س^{٣} + س^{٢} - ٥س + ١ ، س ∈ [-٢ ، ٢] ، جد :

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

ب) نقط القيم القصوى المحلية ونوعها

الحل: ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢س – ٥ = ٠

(٣س + ٥)(س – ١) = ٠ ⟵ س = $\frac{-٥}{٣}$ ، ١



أ) ق(س) متزايد في الفترة [-٢ ، $\frac{-٥}{٣}$] ، [١ ، ٢]

ق(س) متناقص في الفترة [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١]

ب) يوجد قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{-٥}{٣}$ هي ($\frac{-٥}{٣}$ ، ق($\frac{-٥}{٣}$))

يوجد قيمة صغرى محليه عند س = ١ هي (١ ، ق(١))

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & \text{، س} < ٢ \\ ٥ - \text{س} & \text{، س} \geq ٢ \end{cases}$

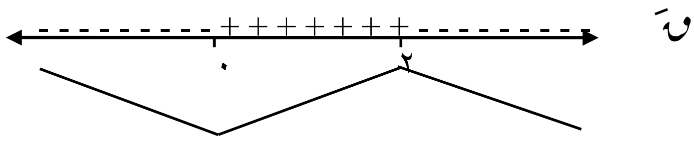
أ) القيم س التي يكون عندها للاقتران نقط حرجة

ب) القيم العظمى والصغرى للاقتران ق

الحل: ق'(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} & \text{، س} < ٢ \\ -١ & \text{، س} > ٢ \\ \text{غ . م} & \text{، س} = ٢ \end{cases}$

٢س = ٠ ⟵ س = ٠

∴ أ) قيم س الحرجة هي س = {٠ ، ٢}



ب) يوجد قيمة عظمى محلية عند س = ٢ هي ٣

يوجد قيمة صغرى محلية عند س = ٠ هي -١

٨) إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، وكانت المشتقة الأولى للاقتران ق(س) ، ق'(س) = ٦س – ٣س^{٢} فجد ما يلي :

أ) النقط الحرجة للاقتران ق

ب) مجالات التناقص للاقتران ق

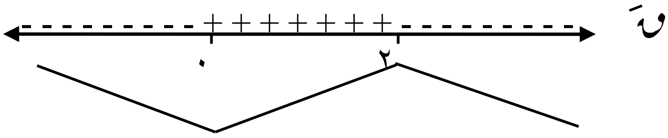
ج) مجالات التقعر للأعلى

الحل: ق'(س) = ٦س – ٣س^{٢} = ٠

٣س(٢ – س) = ٠ ⟵ س = ٠ ، ٢

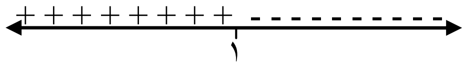
∴ أ) النقط الحرجة (٠ ، ق(٠)) ، (٢ ، ق(٢))

(إذا كتب النقط بالشكل س = ٠ ، ٢ فقط يأخذ علامة فقط)



ب) ق متناقص في الفترات (-∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

ج) ق''(س) = ٦ – ٦س = ٠ ⟵ س = ١



ق(س) مقعر للأعلى في الفترة (-∞ ، ١]

٩) إذا كان ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٥ ، س ∈ ح

أوجد ما يلي :

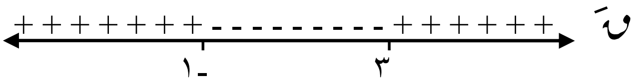
أ) الفترات التي يكون فيها الاقتران متناقصاً

ب) الفترات التي يكون فيها الاقتران ق مقعراً للأسفل

ج) نقطة انعطاف

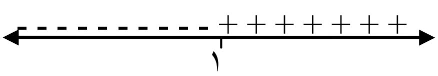
الحل: ق'(س) = ٣س^{٢} - ٦س – ٩ = ٠

(٣س + ٣)(س – ٣) = ٠ ⟵ س = -١ ، ٣



أ) ق متناقص في الفترة [-١ ، ٣]

ق''(س) = ٦س – ٦ = ٠ ⟵ س = ١



ب) ق مقعر للأسفل في الفترة (-∞ ، ١]

ج) نقطة الانعطاف عند س = ١

وهي النقطة (١ ، ق(١)) = (١ ، -٦)

١٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة يعطى بالمعادلة ق̅(س) = ٢(س – ٣)^{٢}(س – ١)^{٣}(س – ٥)^{٤} فما جميع قيم س التي يوجد عندها قيم صغرى محلية لمنحنى ق(س) :

أ) {٥}   ب) {٣ ، ٥}   جـ) {٢ ، ١}   د) {١}

---

١١) إذا كان ق(س) = { -س^{٢} ، س ≤ ٠ ؛ $\frac{س^{٢}}{٢}$ ، س > ٠ }

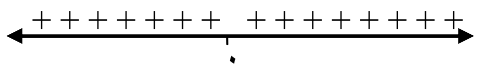
أجب عما يلي :

$\boxed{أ}$ حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران (إن وجدت)

$\boxed{ب}$ حدد فترات التقعر للأعلى وللأسفل منحنى ق(س)

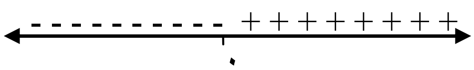
$\boxed{جـ}$ جد نقطة الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

الحل : ق̅(س) = { -٢س ، س < ٠ ؛ س ، س > ٠ }



$\boxed{أ}$ ∴ ق(س) متزايد (- ∞ ، ∞) وغير متناقص

$\boxed{ب}$ ق̿(س) = { -٢ ، س < ٠ ؛ ١ ، س > ٠ }



ق(س) مقعر للأعلى [٠ ، ∞) ، مقعر للأسفل (-∞ ، ٠]

$\boxed{جـ}$ نقطة الانعطاف (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)

---

١٢) مجموعة النقاط الحرجة للاقتران ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - ١٦س}$ هي :

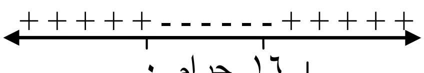
أ) {٠ ، ١٦}   ب) {٠ ، ٨ ، ١٦}

جـ) {٨}   د) غير موجودة

الحل : س^{٢}- ١٦س = ٠

س(س – ١٦) = ٠

س = ٠ ، س = ١٦



<u>نحدد المجال أولاً لأنه جذر زوجي</u>

ق̅(س) = $\frac{٢س - ١٦}{٢ \times \sqrt{س^{٢} - ١٦س}}$

٢س – ١٦ = ٠ ⟵ س = $\cancel{٨}$ out

س^{٢} - ١٦س = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = ١٦

قيم س الحرجة = { ٠ ، ١٦ }

---

١٣) إذا كان ق(س) = س^{٤}+ ٢س^{٣}- ١٠س + ٧ ، أوجد القيم القصوى :

الحل : ق̅(س) = ٤س^{٣}+ ٦س^{٢}- ١٠

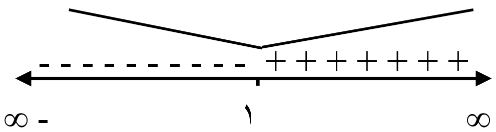
٤س^{٣}+ ٦س^{٢}- ١٠ = ٠

٢س^{٣}+ ٣س – ٥ = ٠

س = ١

س^{٣}	س^{٢}	س	س^{٠}
٢	٣	٠	-٥
$\boxed{١}$	٢	٥	٥
٢	٥	٥	٠

٢س^{٢}+ ٥س + ٥ = ٠ (لا تحلل لأن المميز سالب)



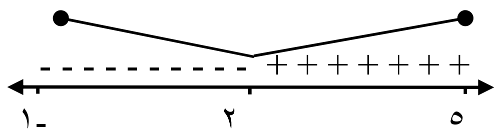
س = ١ صغرى مطلقة محلية وهي ق(١) = ٠

---

١٤) إذا كان ق(س) = |س - ٢| ، س ∈ [-١ ، ٥] ، أوجد نقط القيم القصوى :

الحل : ق(س) = { س - ٢ ، س > ٢ ؛ -س + ٢ ، س ≤ ٢ }

ق̅(س) = { ١ ، س > ٢ ؛ -١ ، س < ٢ }



س = ٢ ، صغرى مطلقة محلية وهي ق(٢) = ٠

س = ٥ ، عظمى مطلقة وهي ق(٥) = ٣

س = -١ ، عظمى مطلقة وهي ق(-١) = ٣

<u>لو طلب قيم س الحرجة</u> = {-١ ، ٢ ، ٥}

١٥) إذا كان ق(س) = ٣ $\sqrt[3]{س}$ – س ، جد ما يلي :

أ الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايد

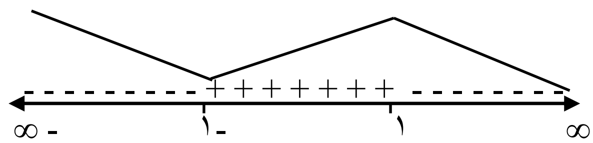
ب القيمة العظمى المحلية للاقتران ق(س)

جـ الفترة (الفترات) التي يكون فيها مقعر للأعلى

الحل : ق(س) = ٣س$^{\frac{1}{3}}$ - س

ق'(س) = س$^{\frac{-2}{3}}$ - ١ ، ق''(س) = $\frac{-2}{3}$ س$^{\frac{-5}{3}}$

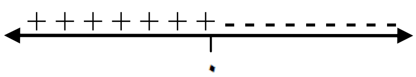
ق'(س) = $\frac{1}{س^{\frac{2}{3}}}$ - ١ = $\frac{1 - س^{\frac{2}{3}}}{س^{\frac{2}{3}}}$



أ ق(س) متزايد [-١ ، ١]

ب س = ١ عظمى محلية وهي ق(١) = ٢

جـ ق''(س) = $\frac{-2}{3س^{\frac{5}{3}}}$



ق(س) مقعر للأعلى (- ∞ ، ٠]

١٦) إذا كان ق(س) = س$^{\frac{2}{3}}$ (س – ٤)^{2} + ٢ ، جد :

أ الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايداً

ب القيم العظمى المحلية للاقتران ق (إن وجدت)

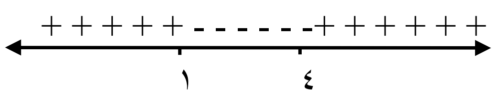
الحل : ق'(س) = ٣س$^{\frac{2}{3}}$ × ٢(س – ٤)^{1} + (س – ٤)^{2} × $\frac{2}{3}$ س$^{\frac{-1}{3}}$

= $\frac{٢(س - ٤) \times س^{\frac{2}{3}}}{س^{\frac{1}{3}}}$ + $\frac{٢(س - ٤)^{2}}{٣س^{\frac{1}{3}}}$

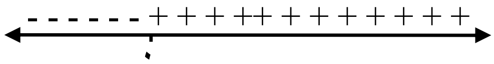
= $\frac{٢س^{2} - ٤س + ٢س^{2} - ١٦س + ١٦}{٣س^{\frac{1}{3}}}$

ق'(س) = $\frac{٤س^{2} - ٢٠س + ١٦}{٣س^{\frac{1}{3}}}$

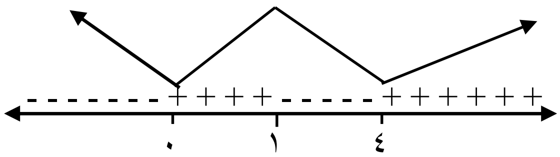
بسط



مقام



ق'



أ ق(س) متزايد [٠ ، ١] ، [٤، ∞)

ب س = ١ عظمى محلية وهي ق(١) = ١١

١٧) إذا كان للاقتران :

ق(س) = $\frac{1}{4}$ (س – ٢)^{4} - ٦س^{2} + ٣٩س ، س ∈ [١ ، ١٠]

جد :

أ الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق(س) مقعر للأسفل

ب جد ميل المماس عند نقط الانعطاف لـق(س)

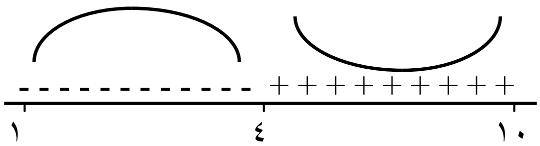
الحل : ق'(س) = (س – ٢)^{3} - ١٢س + ٣٩

$\boxed{ق''(س) = ٣(س – ٢)^{2} - ١٢}$

٣(س -٢)^{2} = ١٢ ⟵ (س – ٢)^{2} = ٤

س – ٢ = ٢ ⟵ $\boxed{س = ٤}$

س – ٢ = -٢ ⟵ $\boxed{\cancel{س = ٠}}$



ق(س) مقعر للأسفل [١ ، ٤]

نقط الانعطاف (٤ ، ق(٤))

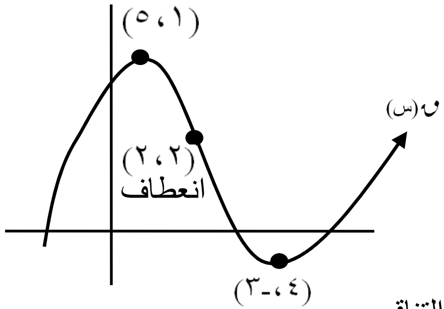
* ميل المماس عند نقطة الانعطاف

= ق'(٤) = ٨ – ٤٨ + ٣٩ = -١

* خصائص الاقتران ق(س) من الرسم :

أولاً : استنتاج خصائص ق(س) من منحنى ق(س)

١) اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س) أجب عن الأسئلة التي تليه :



أ) مجالات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى العظمى والصغرى

ج) مجالات التقعر للأعلى والأسفل

د) نقط الانعطاف

الحل: ق(س) متزايد من (- ∞ ، ١] ، [٤ ، ∞)

ق(س) متناقص [١ ، ٤]

ق(س) مقعر للأسفل (- ∞ ، ٢]

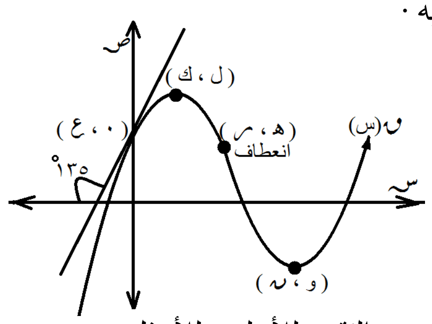
ق(س) مقعر للأعلى [٢ ، ∞)

عند س = ١ قيمة عظمى محلية وهي ق(١) = ٥

عند س = ٤ قيمة صغرى محلية وهي ق(٤) = -٣

نقطة انعطاف : (٢ ، ٢)

٢) اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) أجب عن الأسئلة التي تليه ·



أ) فترات التزايد والتناقص والتقعر للأعلى وللأسفل

ب) قَ(و) ، قَ(ل) ، قَ(٠)

الحل: أ) ق(س) متزايد (- ∞ ، ل] ، [و ، ∞)

ق(س) متناقص [ل ، و]

ق(س) مقعر للأسفل (- ∞ ، هـ]

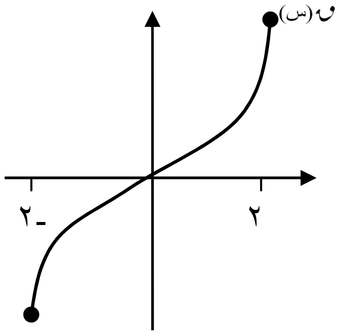
ق(س) مقعر للأعلى [هـ ، ∞)

ب) قَ(و) = ٠ ، قَ(ل) = ٠ } مماس أفقي

قَ(٠) = ظا(١٨٠ – ١٣٥) = ظا(٤٥) = ١

(مماس له زاوية)

٣) اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) أجب عن الأسئلة التي تليه :



أ) مجالات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى العظمى والصغرى

ج) فترات التقعر للأعلى وللأسفل

الحل: ق(س) متزايد [-٢ ، ٢]

ق(س) مقعر للأسفل [-٢ ، ٠]

ق(س) مقعر للأعلى [٠ ، ٢]

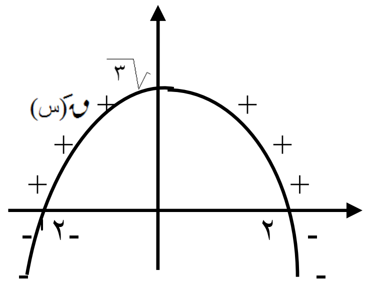
عند س = -٢ قيمة صغرى مطلقة وهي ق(-٢)

عند س = ٢ قيمة عظمى مطلقة وهي ق(٢)

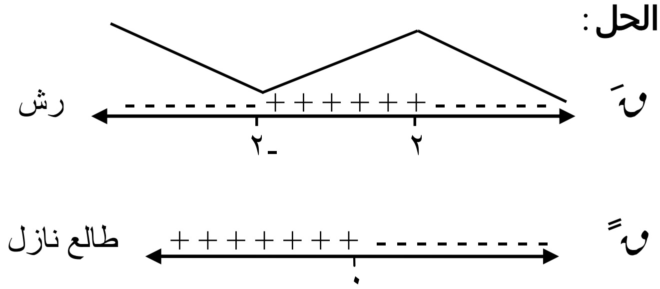
عند س = ٠ نقطة انعطاف (٠ ، ق(٠))

ثانياً : استنتاج خصائص ق(س) من رسمه قَ(س)

١) الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) أوجد خصائص ق(س) :



الحل :



ق(س) متزايد [-٢ ، ٢]

ق(س) متناقص (- ∞ ، -٢] ، [٢ ، ∞)

ق(س) له قيمة صغرى محلية (-٢ ، ق(-٢))

عند س = ٢ قيمة عظمى محلية وهي ق(٢)

ق(س) مقعر للأعلى (- ∞ ، ٠]

ق(س) مقعر للأسفل [٠ ، ∞)

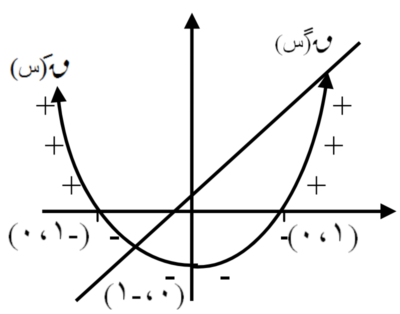
نقطة انعطاف : (٠ ، ق(٠))

ثالثاً : استنتاج خصائص ق(س) من رسمة قً(س) :

٢) الرسم التالي يمثل منحنى قَ(س) ، قً(س) للاقتران كثير حدود اعتمد على ذلك للإجابة عن الأسئلة التي تليه :

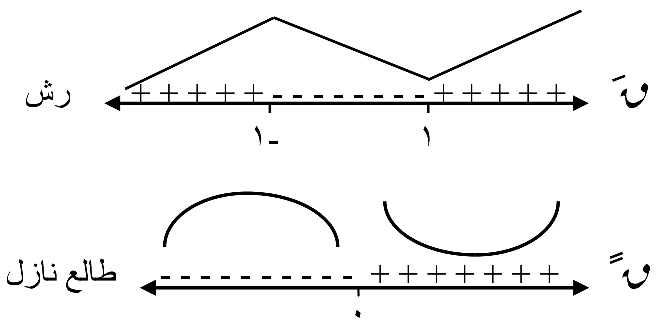
أ) فترات التناقص ب) القيمة الصغرى

ج) فترات التقعر للأعلى د) زاوية الانعطاف



الحل : عندما ترد في السؤال رسمتان فلا داعي لرسمه

قً(س) الأولى هو قَ(س) :



ق(س) متزايد (- ∞ ، -١] ، [١ ، ∞)

ق(س) متناقص [-١ ، ١]

ق(س) مقعر للأعلى [٠ ، ∞)

ق(س) مقعر للأسفل (- ∞ ، ٠]

عند س = -١ قيمة عظمى وهي ق(-١) = محلية

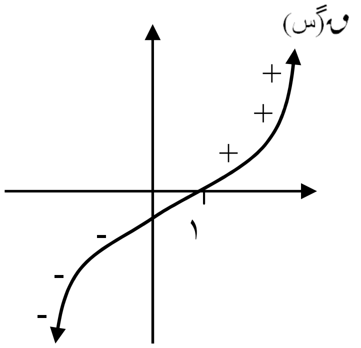
عند س = ١ قيمة صغرى وهي ق(١) = محلية

عند س = ٠ نقطة انعطاف (٠ ، ق(٠))

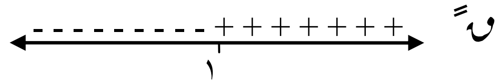
٣) الشكل التالي يمثل منحنى قً(س) أوجد :

١) فترات التقعر للأعلى وللأسفل

٢) نقطة الانعطاف



الحل :



ق(س) مقعر للأعلى [١ ، ∞)

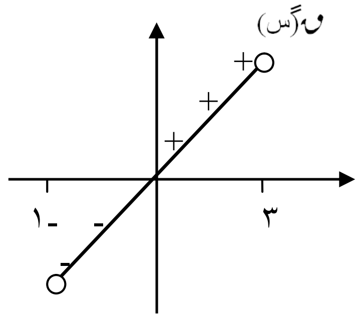
ق(س) مقعر للأسفل (- ∞ ، ١]

نقطة الانعطاف (١ ، ق(١))

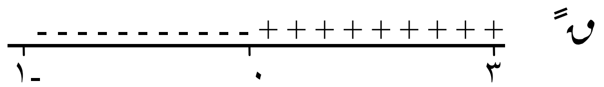
٤) الشكل المجاور يمثل منحنى ق″(س) للاقتران ق(س) المعرف على [-١ ، ٣] ، أوجد :

١) فترات التقعر

٢) نقط الانعطاف



الحل :



ق(س) مقعر للأعلى [٠ ، ٣]

ق(س) مقعر للأسفل [-١ ، ٠]

نقطة الانعطاف (٠ ، ق(٠))

٥) إذا كان الاقتران ق(س) متصل على [-١ ، ٤] ،

وكان ق(س) = { جـ س^{٢} + ى س + هـ ، -١ ≤ س < ١
م س + ب ، ١ ≤ س ≤ ٤ }

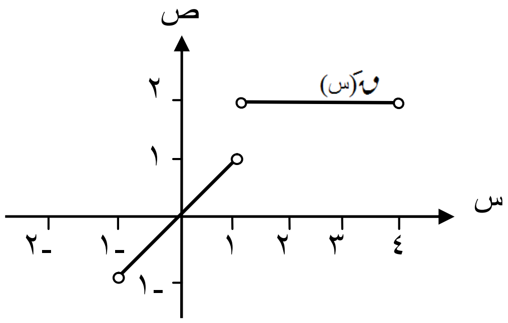
ومثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق كما في الشكل التالي ، فجد كلاً مما يلي :

م) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق

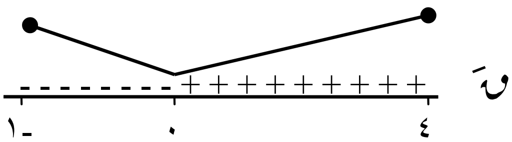
ب) فترات التزايد ، وفترات التناقص للاقتران ق

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق قيم قصوى محلية

ى) قيم كل من الثوابت م ، ب ، جـ ، ى ، هـ ، علماً بأن ق(-١) = ٢ ، ق(٤) = ٨



الحل :



م) قيم س الحرجة = {-١ ، ٠ ، ١ ، ٤}

ب) ق(س) متزايد [٠ ، ٤] ، ق(س) متناقص [-١ ، ٠]

جـ) س = ٠ ، صغرى محلية وهي ق(٠)

ى) ق′(س) = { ٢جـ س + ى ، -١ < س < ١
م ، ١ < س < ٤ }

ق′(٠) = ٠ ← (من الشكل) ٠ + ى = ٠ ← $\boxed{\text{ى = ٠}}$

ق′(٢) = ٢ ← (من الشكل) $\boxed{\text{م = ٢}}$

ق(٤) = ٨ ← ٤م + ب = ٨ ← $\boxed{\text{ب = ٠}}$

ق(-١) = ٢ ← جـ − ى + هـ = ٢ ← $\boxed{\text{جـ + هـ = ٢}}$

ق′(١) = ٢ ← ٢جـ + ٠ = ١ ← $\boxed{\text{جـ} = \frac{١}{٢}}$

$\frac{١}{٢}$ + هـ = ٢ ← $\boxed{\text{هـ} = \frac{٣}{٢}}$

المعادلات المرتبطة بالزمن :

* لحل المسائل المتعلقة بهذا الموضوع نتبع الخطوات التالية :

١) نحدد المعلومات الأساسية في السؤال
٢) نحدد الثوابت والمتغيرات
٣) نحدد قيم المتغيرات اللحظية
٤) نحدد المطلوب في المسألة
٥) نشتق الطرفين بدلالة الزمن
٦) يُفضل الرسم إن أمكن ذلك

*المعادلات المرتبطة بالزمن :

هي عبارة عن كميات حسابية ترتبط قيمتها بالزمن ويكون هذا المعدل (+ أو – أو صفر) حيث يدل

+ ← يزداد مع الزمن

- ← يقل مع الزمن

صفر ← لا يتغير مع الزمن

* يرمز للمتغير بدلالة الزمن *

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ ، .... ، $\frac{\text{ءالمتغير}}{\text{ءن}}$

* بعض المشتقات بدلالة الزمن *

العلاقة	المشتقة بدلالة الزمن
س	$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$
ص	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$
س + ص	$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$
$\text{س}^{٣}$	$٣\text{س}^{٢}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$
٧س + ٥ص	$٧\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٥\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$
$\text{ن}^{٢}$	٢ن
$(\text{س} + \text{ص})^{٣}$	$٣(\text{س} + \text{ص})^{٢}\left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right)$
س ص	$\text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \text{ص}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$
$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٣} + \text{ن}^{٢}$	$٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٣\text{ص}^{٢}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + ٢\text{ن}$
$\text{س} + \text{ن}^{٢} + ٢$	$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ن}$
$\frac{\text{س} + ١}{\text{ص} + ٢}$	$\frac{(\text{ص} + ٢)\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} - (\text{س} + ١)\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}}{(\text{ص} + ٢)^{٢}}$

(النقص أو الزيادة هي كلمة تعني الإشارة)

١) تتحرك نقطة على منحنى العلاقة $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٥\text{س} + ٣\text{ص} - ٦ = ٠$ ، فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة إلى الزمن ٣سم/ث عند النقطة (١ ، ٢) فجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة إلى الزمن عند النقطة نفسها

الحل : $\left.\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right|_{(١،٢)} = ٣\text{سم/ث}$ ، $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right|_{(١،٢)} =$ مطلوبة

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٥\text{س} + ٣\text{ص} - ٦ = ٠$

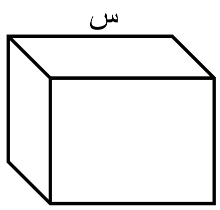
$٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - ٥\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٣\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$

$٦ + ٤\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - ١٥ + ٣\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$

$٧\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٩ \longrightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٩}{٧}$ سم/ث

* المكعب :

مساحة الوجه الواحد : $\text{س}^{٢}$
المساحة الجانبية : $٤\text{س}^{٢}$
مساحة القاعدتين : $٢\text{س}^{٢}$
المساحة الكلية : $٦\text{س}^{٢}$
حجم المكعب : $\text{س}^{٣}$



٢) إذا كان معدل تمدد طول ضلع مكعب يساوي $\frac{١}{٢}$ سم/ث فأوجد معدل التغير في حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه = ٦سم ثم أوجد معدل التغير في مساحته الكلية :

الحل : $\boxed{\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٢} \text{ ، س} = ٦ \text{ ، } \frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} \text{ مطلوبة ، } \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} \text{ مطلوبة}}$

$\text{ح} = \text{س}^{٣} \longrightarrow \frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = ٣\text{س}^{٢}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = ٣ \times (٦)^{٢} \times \frac{١}{٢} = ٥٤\text{سم}^{٣}\text{/ث}$

$\text{م} = ٦\text{س}^{٢} \longrightarrow \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ١٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ١٢ \times ٦ \times \frac{١}{٢} = ٣٦\text{سم}^{٢}\text{/ث}$

التغير

مسافة طول	حجم	مساحة	زاوية
م/ث	$م^3$/ث	$م^2$/ث	راديان/ث
سم / ساعة			

الدائرة

مساحة : $م = \pi نق^2$ المحيط : $ل = 2\pi نق$

٣) قرص دائري الشكل بدأ يحترق بحيث تتغير مساحته بمعدل ١٠ $سم^2$/ث ، أوجد معدل التغير في محيطه عندما يكون نصف قطره ٣ سم :

الحل :

$\boxed{نق = 3 \ ، \ \frac{دل}{دن} \text{ مطلوبة } ، \ \frac{دنق}{دن} \text{ مطلوبة } ، \ \frac{دم}{دن} = -10}$

* معدل التغير في المحيط :

$ل = 2\pi نق \longrightarrow \frac{دل}{دن} = 2\pi \frac{دنق}{دن}$

لكن $م = \pi نق^2 \longrightarrow \frac{دم}{دن} = 2\pi نق \frac{دنق}{دن}$

يحترق $\longrightarrow$ يقل $\longrightarrow -10 = 2\pi \times 3 \frac{دنق}{دن}$

$\frac{دنق}{دن} = \frac{-5}{3\pi}$ سم/ث

$\therefore \frac{دل}{دن} = 2\pi \times \frac{-5}{3\pi} = \frac{-10}{3}$ سم/ث

الكرة

$ح = \frac{4}{3}\pi نق^3$ المحيط : $م = 4\pi نق^2$

٤) بالون على شكل كرة يخرج منه الهواء بمعدل ١٠ $سم^3$/ث ، أوجد معدل التغير في مساحة سطح البالون الخارجي عندما $نق = 5$ سم :

الحل :

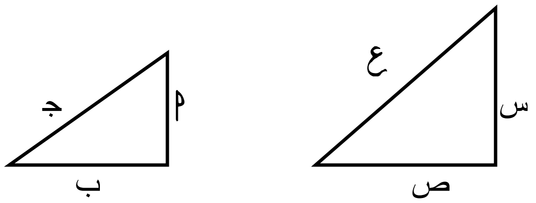
$\boxed{نق = 5 \ ، \ \frac{دح}{دن} = -10 \ ، \ \frac{دنق}{دن} \text{ مطلوبة } ، \ \frac{دم}{دن} \text{ مطلوبة}}$

$ح = \frac{4}{3}\pi نق^3 \longrightarrow \frac{دح}{دن} = 4\pi نق^2 \frac{دنق}{دن}$

$-10 = 4\pi \times 25 \frac{دنق}{دن} \longrightarrow \frac{دنق}{دن} = \frac{-1}{10\pi}$ سم/ث

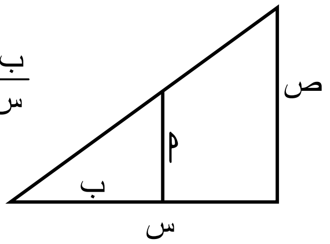
$م = 4\pi نق^2 \longrightarrow \frac{دم}{دن} = 8\pi نق \frac{دنق}{دن}$

$\frac{دم}{دن} = 8\pi \times 5 \times \frac{-1}{10\pi} = -4 سم^2/ث$

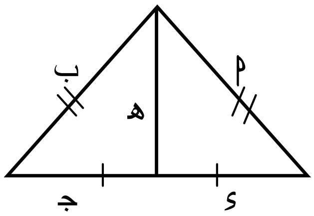


* إذا كان المثلثان متشابهان فإن :

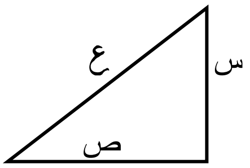
$\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{ج}$



$\frac{ب}{س} = \frac{أ}{ص}$



أ = ب
د = ج
هـ مشترك



فيثاغورس
$ع^2 = س^2 + ص^2$

* مساحة المثلث :

$م = \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

أو

$م = \frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب ضلعين متجاورين $\times$ جا الزاوية المحصورة

* محيط المثلث :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$جا\theta = \frac{المقابل}{الوتر}$ ، $جتا\theta = \frac{المجاور}{الوتر}$ ، $ظا\theta = \frac{المقابل}{المجاور}$

* قانون جيب التمام :

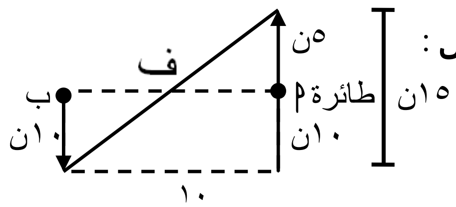
$$\text{ع} = \sqrt{\text{و}_1^2 + \text{و}_2^2 - 2\,\text{و}_1\,\text{و}_2\,\text{جتا}\,\theta}$$

<u>ملاحظة :</u> السرعة × الزمن = المسافة

$$\text{ص} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \text{ن}$$

٥) إذا كانت الطائرة م تبعد عن الطائرة ب مسافة ١٠كم ، تحركت م شمالاً بسرعة ٥كم/ث وتحركت ب جنوباً بسرعة ١٠كم/ث ، أوجد معدل التغير في المسافة بين الطائرتين بعد ٦ ثوان من بدء الحركة :

الحل :



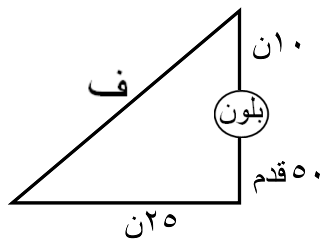
$$\text{ف} = \sqrt{(15\text{ن})^2 + (10)^2} = \sqrt{225\text{ن}^2 + 100}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{450\text{ن}}{2\sqrt{225\text{ن}^2 + 100}}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{450 \times 6}{2\sqrt{225(6)^2 + 100}} = 14{,}9\ \text{كم/ث}$$

٦) بالون على ارتفاع ٥٠قدم ، يصعد للأعلى بمعدل ١٠قدم/ث تمر من تحته سيارة تسير على خط مستقيم بسرعة منتظمة قدرها ٢٥قدم/ث أوجد معدل التغير في المسافة بين السيارة والبالون بعد ٢ث :

الحل :



$\text{ن} = 2$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ مطلوبة

$$\text{ف} = \sqrt{(25\text{ن})^2 + (10\text{ن} + 50)^2}$$

$$\text{ف} = \sqrt{625\text{ن}^2 + 100\text{ن}^2 + 1000\text{ن} + 2500}$$

$$\text{ف} = \sqrt{725\text{ن}^2 + 1000\text{ن} + 2500}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{725 \times 2\text{ن} + 1000}{2\sqrt{725\text{ن}^2 + 1000\text{ن} + 2500}}$$

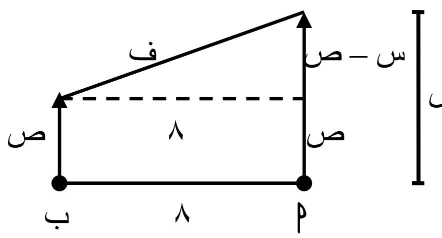
$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{725 \times 4 + 1000}{2\sqrt{725 \times 4 + 2000 + 2500}}\ \text{قدم/ث}$$

٧) أقلعت طائرة من أحد المطارات في الساعة السابعة مساءً متجهه نحو الشرق بسرعة ٤كم/س وبعد ساعة من إقلاعها أقلعت طائرة أخرى من نفس المطار متجهه نحو الجنوب بسرعة ٦كم/س ، أوجد معدل التغير في المسافة بين الطائرتين بعد ساعة واحدة من إقلاع الثانية :

الحل :

٨) مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي ، المسافة الأفقية بينهما ٨ أمتار ، بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة ٢م/ث ، وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ١م/ث . جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني :

الحل :



$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2\text{م/ث}(\text{ن}+2) \longleftarrow \text{س} = 2\text{ن} + 4$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 1\text{م/ث}\,(\text{ن}) \longleftarrow \text{ص} = 1\text{ن}$$

$$\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=2} = \text{مطلوبة}$$

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - \text{ص})^2 + 64}$$

$$\text{ف} = \sqrt{(2\text{ن} + 4 - \text{ن})^2 + 64} \longleftarrow \text{ف} = \sqrt{(\text{ن} + 4)^2 + 64}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{2(\text{ن}+4)^1 \times 1}{2\sqrt{(\text{ن}+4)^2 + 64}} = \frac{6}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$= \frac{6}{10} = 0{,}6\ \text{م/ث}$$

٩) دائرتان متحدتان في المركز ، طولا نصفي قطريهما ٥سم ، ٢٠سم ، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد طول نصف قطرها بمعدل ٢سم/د ، وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص طول نصف قطرها بمعدل ١ سم/د ، جد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنطبق الدائرتان على بعضهما :

الحل : افرض أن الزمن لتغيرهما هو ن دقيقة

طول نصف قطر الدائرة الصغرى = ٥ + ٢ن

طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٢٠ – ن

م(ن) المساحة المحصورة بينهما

$\text{م(ن)} = \pi(٢٠ - \text{ن})^{٢} - \pi(٥ + ٢\text{ن})^{٢}$

المطلوب : $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ عندما م = ٠ أي عندما ٢٠ – ن = ٥ + ٢ن

ومنه ٣ن = ١٥

∴ ن = ٥ دقائق

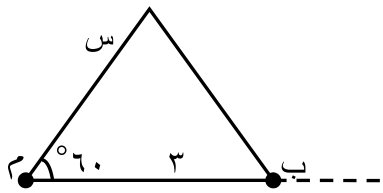
$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = -٢\pi(٢٠ - \text{ن}) - ٤\pi(٥ + ٢\text{ن})$

عندما ن = ٥

فإن $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = -٢\pi(٢٠ - ٥) - ٤\pi(٥ + ١٠) = -٩٠\pi$ سم^{٢}/د

١٠) طريقان مستقيمان يميل أحدهما عن الآخر بزاوية قياسها ٦٠° ويلتقيان في م ويوجد بيت ب على أحد الطريقين ويبعد ٣كم عن م فإذا سار رجل على الطريق الآخر بسرعة ٥كم/س باتجاه م أوجد معدل تغير بعده عن البيت في اللحظة التي يبعد فيها عن م بمقدار ٢كم :

الحل :



$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٥$

س = ٢

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ مطلوبة

$\text{ف} = \sqrt{(٣)^{٢} + \text{س}^{٢} - ٢ \times ٣\text{س} \times \text{جتا } ٦٠}$

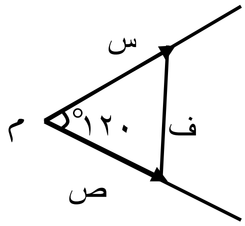
$\text{ف} = \sqrt{٩ + \text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$

$$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} - ٣\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{٩ + \text{س}^{٢} - ٣\text{س}}}$$

$$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{(٢ \times ٢ \times -٥) - ٣ \times -٥}{٢\sqrt{٩ + ٤ - ٦}} = \frac{-٥}{٢\sqrt{٧}} \text{ كم/س}$$

١١) انطلقت سفينتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين ، قياس الزاوية بينهما (١٢٠°) ، إذا كانت سرعة الأولى ٣٠كم/ساعة ، وسرعة الثانية ٤٠كم/ساعة ، فجد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعداهما عن نقطة الانطلاق ٦كم ، ٨كم على الترتيب :

الحل :



$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٣٠$كم/س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٤٠$كم/س

$\left|\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}\right|_{\text{س} = ٦ ،\ \text{ص} = ٨} =$ مطلوبة

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س} \times \text{ص} \times \frac{-١}{٢}}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{س ص}}$

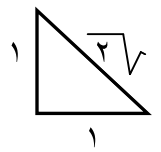
$$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \text{ص}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - \text{س ص}}}$$

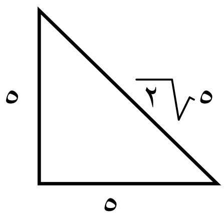
$$= \frac{٢ \times ٨ \times ٤٠ + ٢ \times ٦ \times ٣٠ + ٨ \times ٣٠ + ٦ \times ٤٠}{٢\sqrt{١٤٨}} \text{ كم/س}$$

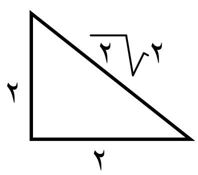
* <u>التغير في الزوايا :</u>

إذا كان المطلوب التغير في الزاوية نستخدم إما جا أو جتا أو ظا أو أي علاقة تحتوي على زاوية

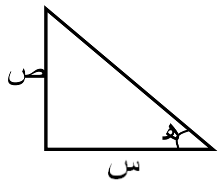
العلاقة	المشتقة
جاهـ	$\text{جتاهـ} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}}$
جتاهـ	$-\text{جاهـ} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}}$
ظاهـ	$\text{قا}^{٢}\text{هـ} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}}$





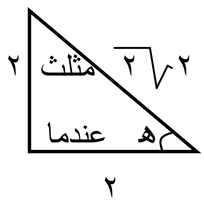


١٢) في مثلث قائم الزاوية إذا كان طولا الضلعين المقابل والمجاور للزاوية (هـ) هي ص ، س على التوالي وإذا كان معدل تزايد س هو ١ سم/ث ومعدل تناقص ص هو $\frac{١}{٤}$ سم/ث فجد سرعة تغير الزاوية هـ في اللحظة التي يتساوى فيها الضلعان (س ، ص) حيث س = ٢سم :



الحل : $\text{ظاهـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ}\ \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{\text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - \text{ص}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{\text{س}^{٢}}$$



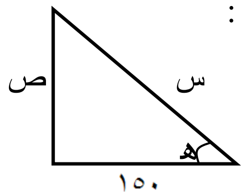
$$\text{جتاهـ} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{قاهـ} = \sqrt{٢} \longrightarrow \text{قا}^{٢}\text{هـ} = ٢$$

$$\therefore ٢\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{٢ \times \frac{-١}{٤} - ٢ \times ١}{٤} = \frac{-٥}{١٦}\ \text{راديان/ث}$$

١٣) يرتفع بالون رأسياً للأعلى بمعدل ثابت وقدرة ٤٢م/د ، إذا تم رصد البالون من مشاهد على الأرض ويبعد ١٥٠م عن موقع البالون على الأرض انظر الشكل التالي ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون عندما يكون البالون يرتفع ١٥٠ متر عن سطح الأرض :

الحل :



$\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}}$ مطلوبة

$\text{قا}^{٢}\text{هـ}$ مطلوبة

$\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = ٤٢$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{ص}}{١٥٠} \longrightarrow \text{قا}^{٢}\text{هـ}\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}}{١٥٠}$$

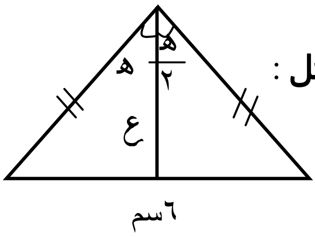
$$\text{س}^{٢} = (١٥٠)^{٢} + \text{ص}^{٢} = (١٥٠)^{٢} + (١٥٠)^{٢} = ٤٥٠٠٠$$

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{(١٥٠)^{٢}} = \frac{٤٥٠٠٠}{(١٥٠)^{٢}} = ٢$$

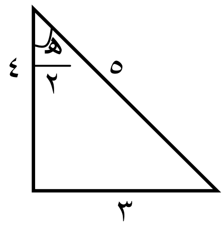
$$\therefore \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{٤٢}{٣٠٠} = \frac{٧}{٥٠}\ \text{راد/د}$$

١٤) مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ثابتة دائماً وتساوي ٦سم وزاوية رأسه تتناقص بمعدل $\frac{١}{٤}$ راد/ث أوجد معدل التغير في ارتفاعه عندما يكون ارتفاعه ٤ سم :

الحل :



$\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{٤}$ ، ع = ٤



$$\text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{قا}\frac{\text{هـ}}{٢} = \frac{٥}{٤}$$

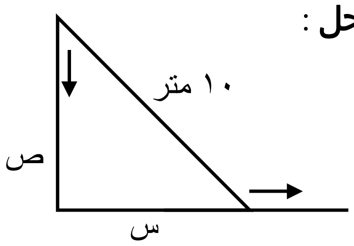
$$\text{ظا}\frac{\text{هـ}}{٢} = \frac{٣}{\text{ع}} \longrightarrow \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\text{هـ}\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-٣\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}}{\text{ع}^{٢}}$$

$$(\frac{١}{٢})(\frac{٥}{٤})^{٢}(\frac{-١}{٤}) \times (١٦) \times \frac{١}{-٣} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{٢٥}{٢٤}\ \text{سم/ث}$$

١٥) سلم طوله ١٠م متكىء على حائط عمودي وأسفله على خط أفقي ، بدأ أسفل السلم بالتحرك مبتعداً عن أسفل الحائط بمعدل ٢م/د ما سرعة نزول أعلى السلم في اللحظة التي يبعد فيها أسفل السلم عن الحائط ٥ متر :

الحل :



$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ مطلوبة

س = ٥

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢$

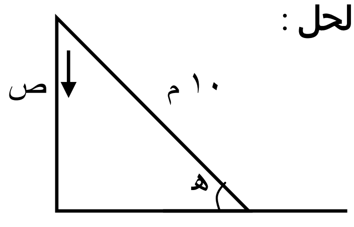
$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٠٠ \longrightarrow \text{ص}^{٢} = ١٠٠ - \text{س}^{٢}$$

$$\text{ص} = \sqrt{١٠٠ - \text{س}^{٢}} \longrightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{س}^{٢}}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-٢ \times ٥ \times ٢}{٢\sqrt{١٠٠ - ٢٥}} = \frac{-١٠}{\sqrt{٧٥}}\ \text{م/د}$$

١٦) سلم طوله ١٠م ، يرتكز على حائط عمودي بدأ ينزلق أسفل السلم الملامس للأرض مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣ م/ث ما سرعة هبوط الطرف المرتكز على الحائط عندما يكون السلم مائل على الأرض بزاوية مقدارها ٦٠° :

الحل :



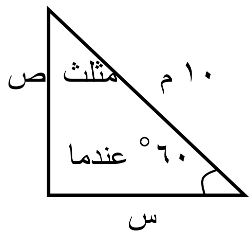
$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ مطلوبة

$\text{هـ} = ٦٠^\circ$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٣$

س مطلوبة

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١٠٠ \longrightarrow \text{ص}^٢ = ١٠٠ - \text{س}^٢$

$\text{ص} = \sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢} \longrightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-٢\text{س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}}$



$\text{جتا } ٦٠ = \frac{\text{س}}{١٠}$

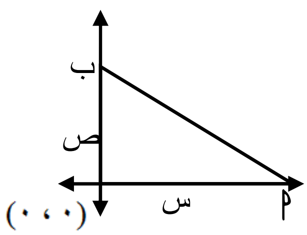
$\frac{١}{٢} = \frac{\text{س}}{١٠} \longrightarrow \text{س} = ٥$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-٢ \times ٥ \times ٣}{٢\sqrt{٧٥}} = \frac{-١٥}{\sqrt{٧٥}}$ م/ث

---

١٧) ؍ ب مستقيم طوله ١٠م ، يتحرك طرفاه ؍ ، ب على محوري السينات والصادات على التوالي في الربع الأول فإذا كان الطرف ؍ يتحرك مبتعداً عن نقطة الأصل باتجاه محور السينات الموجب بسرعة ٢م/د ، ما معدل التغير في مساحة المثلث المتكون من المحورين والمستقيم الواصل بينهما في اللحظة التي يبعد فيها الطرف ؍ ٦ متر عن نقطة الأصل :

الحل :



$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ مطلوبة

$\text{س} = ٦$

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢$

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{س} \times \text{ص}$ لكن $\text{ص}^٢ = ١٠٠ - \text{س}^٢$

$\text{ص} = \sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}$

$\therefore \text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{س} \times \sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٢}\text{س} \times \frac{-٢\text{س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}} + \sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢} \times \frac{\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٢} \times ٦ \times \frac{-١٢ \times ٢}{٢\sqrt{١٠٠ - ٣٦}} + \sqrt{١٠٠ - ٣٦} \times ١$

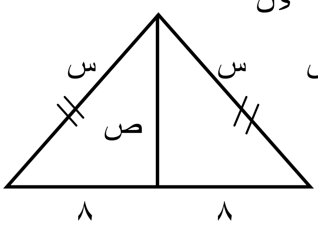
$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{-٣٦}{٨} + ٨ = \frac{-٣٦}{٨} + \frac{٦٤}{٨} = \frac{٢٨}{٨}$ م²/د

---

١٨) يتناقص الضلعان المتساويان في مثلث متساوي الساقين ذو قاعدة ثابتة طولها ١٦ قدم ، بمعدل ٣ قدم/د ، ما هو معدل تناقص المساحة عندا يكون طول الضلعان المتساويان يساوي طول القاعدة :

الحل : $\text{س} = ١٦$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٣$

، $\text{ص} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ مطلوبة ، $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ مطلوبة



$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ١٦ \times \text{ص} = ٨ \text{ ص}$

$\text{س}^٢ = \text{ص}^٢ + ٦٤$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^٢ - ٦٤}$

$\text{م} = ٨\sqrt{\text{س}^٢ - ٦٤} \longrightarrow \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{٨ \times ٢\text{س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - ٦٤}}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{٨ \times ١٦ \times -٣}{\sqrt{(١٦)^٢ - ٦٤}} = \frac{٨ \times ١٦ \times -٣}{\sqrt{١٦(١٦ - ٤)}}$

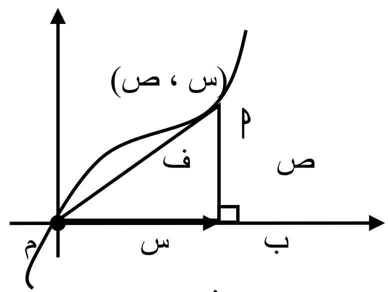
$= \frac{٨ \times ١٦ \times -٣}{٤\sqrt{٤ \times ٣}} = \frac{-٤٨}{\sqrt{٣}}$

١٩) مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعية المتطابقين ٨سم ، يزداد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل ٢°/د جد معدل التغير في مساحة المثلث في كل من الحالات الآتية :
١) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٠°
٢) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٠°
قارن بين الإجابتين وفسر ذلك

الحل :

٢٠) بدأت النقطتان ﺃ ، ب الحركة معاً من نقطة الأصل (م) ، بحيث تتحرك النقطة ب على محور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢سم/ث ، وتتحرك النقطة ﺃ في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = س^٣ ، بحيث تبقى $\overline{\text{ﺃب}}$ دائما عمودية على محور السينات الموجب ، جد :
ﺃ) معدل التغير في مساحة المثلث ﺃ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة
ب) معدل التغير في طول وتر المثلث ﺃ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

الحل :



ﺃ) $\left.\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=١}$ = المطلوب ، ب) $\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=١}$ = المطلوب

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٢$ سم / ث

س = ٢ن ، ص = س^٣ = ٨

ﺃ) م = $\frac{١}{٢}$ × س × ص = $\frac{١}{٢}$ × س × س^٣

$\boxed{\text{م} = ٨\text{ن}^٤}$ ⟵ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٣٢\text{ن}^٣$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٣٢$ سم^٢ /ث

ب) ف = $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{٤\text{ن}^٢ + ٦٤\text{ن}^٦}$

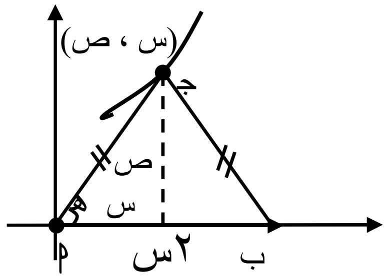
$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٨\text{ن} + ٣٨٤\text{ن}^٥}{٢ \times \sqrt{٤\text{ن}^٢ + ٦٤\text{ن}^٦}}$

$= \frac{٨ + ٣٨٤}{٢ \times \sqrt{٦٨}} = \frac{١٩٦}{\sqrt{٦٨}}$ سم/ث

٢٢) بدأت النقطتان ب ، جـ الحركة معاً من نقطة الأصل (ﺃ) بحيث تتحرك (ب) على محور السينات الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل وتتحرك (جـ) في الربع الأول على منحنى ق(س) = س^٢ بحيث يبقى طول ﺃ جـ يساوي طول ب جـ وكان معدل تغير الزاوية هـ المحصورة بين محور السينات الموجب والمستقيم ﺃ جـ يساوي $\frac{١}{٢}$ راد/ث ، جد معدل التغير في مساحة المثلث ﺃ ب جـ عندما هـ = $\frac{\pi}{٣}$:

الحل : $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}$ راد/ث $\left.\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right|$ = المطلوب

هـ = $\frac{\pi}{٣}$



م = $\frac{١}{٢}$ × ٢س × ص = س × س^٢ ⟵ $\boxed{\text{م} = \text{س}^٣}$

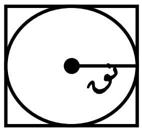
ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ⟵ ظاهـ = $\frac{\text{س}^٢}{\text{س}}$ = س

$\boxed{\text{م} = (\text{ظاهـ})^٣}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٣(\text{ظاهـ})^٢ \times \text{قا}^٢\text{هـ} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

$= ٣ \times (\sqrt{٣})^٢ \times ٤ \times \frac{١}{٢} = ١٨$ وحدة مربعة/ث

٢٣) مربع يتمدد بحيث يزداد طول ضلعه بمعدل ٤ سم/د مرسوم بداخلة دائرة تتمدد معه بحيث تبقى ملامسة لأضلاعه ، أوجد معدل التغير في المساحة بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع يساوي ٢٠سم :



الحل : م = مساحة مربع – مساحة الدائرة

$م = س^{٢} - \pi\, نق^{٢} \quad (نق = \frac{١}{٢} س)$

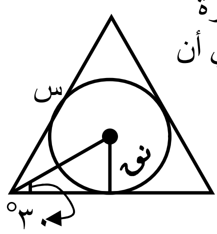
$م = س^{٢} - \frac{\pi}{٤} س^{٢} \longrightarrow \frac{دم}{دن} = ٢س \frac{دس}{دن} \left(١ - \frac{\pi}{٤}\right)$

$\frac{دم}{دن} = ٢ \times ٢٠ \times ٤ \times \left(١ - \frac{\pi}{٤}\right) = ١٦٠ - ٤٠\pi$ سم^{٢}/د

٢٤) دائرة مرسومة داخل مثلث متساوي الأضلاع بحيث تمس أضلاع المثلث فإذا كان طول ضلع المثلث يتزايد بمعدل ٦ سم/ث جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٠سم :

الحل : م = مساحة المثلث – مساحة الدائرة

بما أن المثلث متساوي الأضلاع فهذا يعني أن كل زاوية فيه = ٦٠°



ومساحته هي = م$\triangle$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤} س^{٢}$

$\therefore م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^{٢} - \pi\, نق^{٢}$

لكن ظا ٣٠ = $\frac{نق}{\frac{س}{٢}} \longrightarrow \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{نق}{\frac{س}{٢}} \longrightarrow نق^{٢} = \frac{س^{٢}}{١٢}$

$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^{٢} - \frac{\pi}{١٢} س^{٢} = س^{٢} \left(\frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\pi}{١٢}\right)$

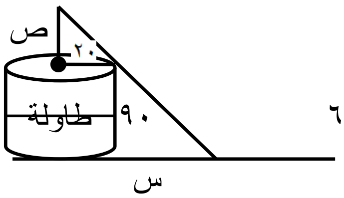
$\frac{دم}{دن} = ٢س \frac{دس}{دن} \left(\frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\pi}{١٢}\right)$

$\frac{دم}{دن} = ٢٠ \times ١٠ \times ٦ \left(\frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\pi}{١٢}\right)$

$= ٣٠\sqrt{٣} - ١٠\pi$ سم^{٢}/ث

$\boxed{\frac{دم}{دن} \text{ مطلوبة} \quad \frac{دس}{دن} = ٦ \quad س = ١٠}$

٢٥) مصباح معلق فوق مركز منضدة أفقية ارتفاعها عن الأرض يساوي ٩٠سم ونصف قطرها ٢٠سم تحرك المصباح رأسياً إلى أسفل نحو المنضدة بسرعة ثابتة تساوي ٦سم/ث أوجد معدل تغير نصف قطر دائرة ظل المنضدة على الأرض عندا يكون ارتفاع المصباح عن المنضدة يساوي ٦٠سم : (سؤال وزارة عن الظل)



الحل : $\frac{دص}{دن} = -٦$م/ث

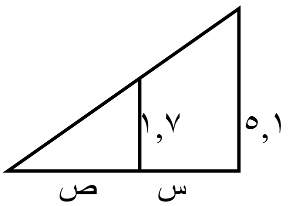
$\frac{دس}{دن}$ = مطلوبة ، ص = ٦٠

$\frac{ص}{٩٠} = \frac{٢٠}{س} \longrightarrow س ص = ١٨٠٠ \longrightarrow س = \frac{١٨٠٠}{ص}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{-١٨٠٠}{ص^{٢}} \frac{دص}{دن} = \frac{-١٨٠٠}{٣٦٠٠} \times -٦ = ٣$ م/ث

٢٦) رجل طوله ١,٧ متراً ، يسير على أرض مستوية بسرعة ٢م/ث مبتعداً عن عمود كهرباء في قمته مصباح ، يرتفع ٥,١ أمتار عن سطح الأرض :

أ) جد معدل تغير طول ظل الرجل



الحل : $\frac{دس}{دن} = ٢$م/ث

$\frac{دص}{دن}$ = مطلوب

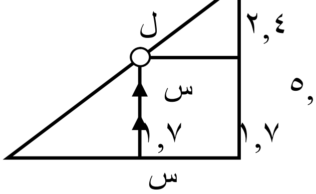
$\frac{٥,١}{١,٧} = \frac{س + ص}{ص} \longrightarrow ٥١ص = ١٧س + ١٧ص$

$٣٤ص = ١٧س \longrightarrow ص = \frac{١}{٢} س$

$\frac{دص}{دن} = \frac{١}{٢} \frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$م/ث

ب) جد معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح ، عندما يكون الرجل على بعد ٣ أمتار عن عمود الكهرباء :

الحل :

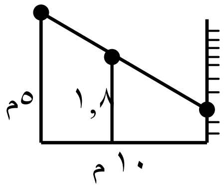


$\left.\frac{دل}{دن}\right|_{س=٣}$ = المطلوب

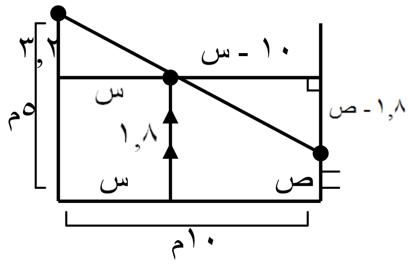
$ل = \sqrt{(٣,٤)^{٢} + س^{٢}}$

$\frac{دل}{دن} = \frac{٢ س \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{(٣,٤)^{٢} + س^{٢}}} = \frac{٣ \times ٢}{\sqrt{(٣,٤)^{٢} + ٩}}$ م/ث

٢٧) معتمداً على الشكل التالي :
يقع مصباح كهربائي على بعد ١٠م من حائط رأسي وعن ارتفاع ٥م عن سطح ممر أفقي يعامد الحائط ، سار رجل طوله ١,٨م على هذا الممر بسرعة $\frac{١}{٢}$ م / ث مبتعداً عن المصباح جد سرعة تحرك ظل رأس الرجل عن الحائط عندما يكون الرجل على بعد ١,٥م عن الحائط :



الحل :



$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right|_{\text{س}=١٠-١,٥=٨,٥}$ = المطلوب

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}$ م/ث

$\frac{٣,٢}{١,٨ - \text{ص}} = \frac{\text{س}}{١٠ - \text{س}} \longleftarrow ٣٢ - ٣,٢\text{س} = ١,٨\text{س} - \text{س ص}$

$\text{س ص} = ٥\text{س} - ٣٢$

$\text{ص} = ٥ - \frac{٣٢}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٣٢ \times ١}{\text{س}^٢}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٣٢ \times ١}{(٨,٥)^٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١٦}{٧٢,٢٥}$ م/ث

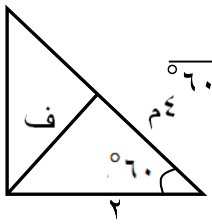
٢٨) مخروط دائري قائم زاوية رأسه ثابتة وتساوي ٦٠°، تتمد قاعدته بسرعة ٤سم^٢/ث ، ما معدل التغير في حجم المخروط عندما يصبح أبعد نقطتين على محيط القاعدة هو ١٦سم :

الحل :

٢٩) قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للأعلى ، فإذا كان ارتفاع القمع ١٦سم ، وطول نصف قطر قاعدته ٨سم ، صب فيه سائل بمعدل ١٢سم^٣/ث ، جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨سم :

الحل :

٣٠) سلم طوله ٤م ، يتكىء على حائط عمودي وأسفله مثبت في الأرض بزاوية ٦٠°، بدأ رجل بصعود السلم بمعدل ٣م/ث ما معدل التغير في المسافة بين الرجل ونقطة التقاء الحائط مع الأرض في اللحظة التي يصل فيها الرجل منتصف السلم :



الحل :

$\text{ف} = \sqrt{(٢)^٢ + \text{س}^٢ - ٢ \times ٢ \times \text{س} \times \text{جتا}\,٦٠^\circ}$

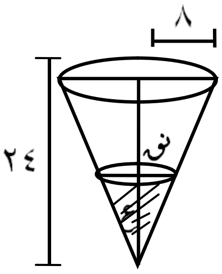
$\text{ف} = \sqrt{٤ + \text{س}^٢ - ٢\text{س}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} - ٢\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{٤ + \text{س}^٢ - ٢\text{س}}}$

$\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{س}=٢} = \frac{٢ \times ٢ \times ٣ - ٢ \times ٣}{٢\sqrt{٤ + ٤ - ٤}} = \frac{٦}{٤}$ م/ث

إي ضلع مقابل للزاوية ٣٠ في مثلث قائم الزاوية = $\frac{١}{٢}$ الوتر

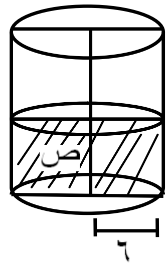
٣١) خزان على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل وارتفاعه ٢٤سم ونصف قطر قاعدته ٨سم ينساب منه الماء من فتحة في رأسه إلى إناء اسطواني الشكل موجود أسفلة وقطر قاعدته ١٢سم جد معدل ارتفاع الماء في الإناء الإسطواني عندما يكون ارتفاع الماء في الخزان المخروطي ١٢سم ومعدل انخفاض الماء في الخزان المخروطي ١سم/د :



الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = مطلوبة

ع = ١٢ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = -١سم/د

* معدل تناقص حجم الماء في المخروط يساوي معدل تزايد حجم الماء في الاسطوانة



$\text{ح}_{\text{الماء في المخروط}} = \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{9}\text{ع}^2 \times \text{ع}$

$\boxed{\text{ح} = \frac{\pi}{27}\text{ع}^3}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{3\pi}{27}\text{ع}^2\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$= \frac{1}{9}\pi \times 144 \times -1$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -16\pi$ سم^3/ د

معدل تناقص حجم الماء في المخروط

من التشابه

$\frac{24}{\text{ع}} = \frac{8}{\text{نق}}$

$3\text{نق} = \text{ع}$

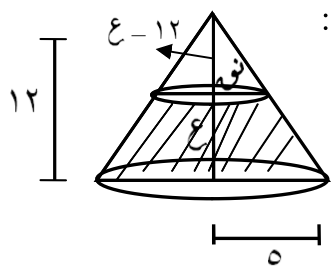
$\text{نق} = \frac{1}{3}\text{ع}$

$\text{ح}_{\text{الماء في الاسطوانة}} = \pi \times 36 \times \text{ص}^2$

$\text{ح}_{\text{س}} = 36\pi\,\text{ص} \longrightarrow \frac{\text{دح}_{\text{س}}}{\text{دن}} = 36\pi\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$16\cancel{\pi} = 36\cancel{\pi}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{36}{16}$ سم/د

٣٢) خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم قاعدته أفقية ورأسه للأعلى وطول نصف قطر قاعدته ٥م وارتفاعه ١٢م ، صب الماء فيه بمعدل $\frac{\pi}{2}$ م^3/د جد معدل التغير في ارتفاع سطح الماء عندما يكون ارتفاع الماء ٦م :



الحل : $\frac{\text{دح}_{\text{ماء}}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{2}$

$\left.\frac{\text{دع}}{\text{دن}}\right|_{\text{ع}=6}$ = مطلوب

ح الماء = ح الكبير – ح الصغير

$\frac{12}{12-\text{ع}} = \frac{5}{\text{نق}}$

$\frac{12\text{نق}}{12} = \frac{5(12-\text{ع})}{12}$

$= \frac{1}{3}\pi(5)^2 \times 12 - \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2(12-\text{ع})$

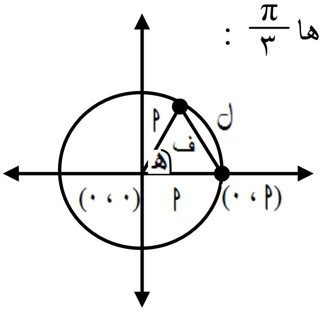
$\text{ح}_{\text{م}} = 100\pi - \frac{\pi}{3}\,\frac{25}{144}(12-\text{ع})^3$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 0 - \frac{\pi}{3} \times \frac{25}{144} \times (3)(12-\text{ع})^2 \times -\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{25\pi}{144} \times 36 \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\frac{\pi}{2} = \frac{25\pi}{4}\frac{\text{دع}}{\text{دن}} \longrightarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{2}{25}$ م/د

٣٣) ابتدأت نقطة بالحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (م ، ٠) بعكس عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة التي ترسمه في أثناء حركتها بمعدل ٨سم / ث جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عند النقطة (م ، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$:



الحل : $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ = ٨سم / ث

$\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{هـ}=\frac{\pi}{3}}$ = مطلوبة

$\text{ف} = \sqrt{\text{م}^2 + \text{م}^2 - 2\text{م}^2\,\text{جتاهـ}}$

$\text{ف} = \sqrt{2\text{م}^2 - 2\text{م}^2\,\text{جتاهـ}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{0 - 2\text{م}^2 \times -\text{جاهـ} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}}{2\sqrt{2\text{م}^2 - 2\text{م}^2\,\text{جتاهـ}}}$

$\text{ل} = \text{م} \times \text{هـ}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{م} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

$8 = \text{م} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{8}{\text{م}}$

$= \frac{2\text{م}^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{8}{\text{م}}}{2\sqrt{2\text{م}^2 - 2\text{م}^2 \times \frac{1}{2}}}$

$= \frac{4\sqrt{3}\,\text{م}}{\text{م}} = 4\sqrt{3}$ سم/ث

المسائل العملية على القيم القصوى :

هناك مسائل عديدة في العلوم الهندسية والاقتصادية وغير ذلك يطلب فيها إيجاد قيم قصوى يمكن حلها بالأساليب التحليلية التي درسناها سابقاً وفيما يلي خطوات مفيدة لحل هذه المسائل :

١) اقرأ المسألة جيداً وأفهم معطياتها ومطلوباتها

٢) ارسم صورة أو مخطط يبين الكميات والعلاقات وبين على الشكل أجزاءه

٣) نحدد العلاقة المقدسة من عبارة أقل ما يمكن أو عبارة أكبر ما يمكن

٤) نجعل العلاقة بدلالة متغير واحد وذلك عن طريق

أ) فيثاغورس

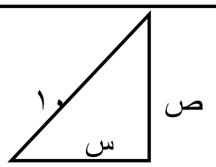
ب) تشابه المثلثات

٥) نشتق العلاقة المقدسة ثم نساوي المشتقة بالصفر

٦) نعوض الجذور (القصوى) عن طريق الرسم أو المشتقة الثانية

---

١) مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠سم ، وطول ضلعي القائمة س ، ص سم أوجد أكبر قيمة للمقدار س + ٣ص :



$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ١٠٠$

$\text{س}^2 = ١٠٠ - \text{ص}^2$

$\text{س} = \sqrt{١٠٠ - \text{ص}^2}$

الحل : ل = س + ٣ص أكبر ما يمكن

$\text{ل} = \sqrt{١٠٠ - \text{ص}^2} + ٣\text{ص}$

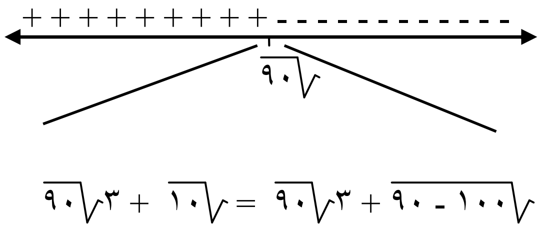
$\text{ل}' = \frac{-٢\text{ص}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{ص}^2}} + ٣ = ٠$

$\frac{٢\text{ص}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{ص}^2}} = ٣$

$\text{ص}^2 = ٩\,(١٠٠ - \text{ص}^2)$

$١٠\text{ص}^2 = ٩٠٠ \longrightarrow \text{ص}^2 = ٩٠ \longrightarrow \text{ص} = \pm\sqrt{٩٠}$

لكن $\text{ص} = -\sqrt{٩٠}$ مرفوضة لأن ص تمثل طول



$\text{ل} = \sqrt{١٠٠ - ٩٠} + ٣\sqrt{٩٠} = \sqrt{١٠} + ٣\sqrt{٩٠}$

---

٢) حاصل ضرب عددين يساوي ١٦ ، أوجد العددين بحيث يكون مجموع أحدهما ومربع الآخر أقل ما يمكن :

الحل : ل = س + ص² أقل ما يمكن

العدد الأول = س

العدد الثاني = ص

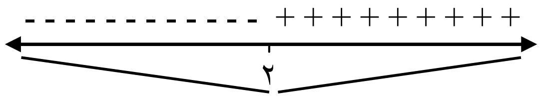
س ص = ١٦

$\text{س} = \frac{١٦}{\text{ص}}$

$\text{ل} = \frac{١٦}{\text{ص}} + \text{ص}^2$

$\text{ل}' = \frac{-١٦}{\text{ص}^2} + ٢\text{ص} = ٠$

$\text{ص}^3 = ٨ \longrightarrow \text{ص} = ٢$



$\text{س} = \frac{١٦}{\text{ص}} = \frac{١٦}{٢} = ٨ \longrightarrow$ ∴ العددان {٢ ، ٨}

---

٣) مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠ ، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن مستخدماً تطبيقات التفاضل :

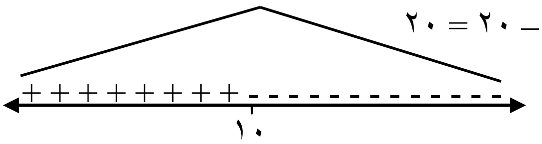
الحل : س + ٢ص = ٤٠   س = ٤٠ − ٢ص

ل = س × ص   أكبر ما يمكن

$\text{ل} = (٤٠ - ٢\text{ص})(\text{ص}) \longrightarrow \text{ل} = ٤٠\text{ص} - ٢\text{ص}^2$

$\text{ل}' = ٤٠ - ٤\text{ص} = ٠ \longrightarrow \text{ص} = ١٠$

س = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠



---

٤) قطعة أرض مستطيلة الشكل ، محيطها ٨٠٠متر ، جد بعدي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن :

الحل : ٢س + ٢ص = ٨٠٠ ⟵ س + ص = ٤٠٠

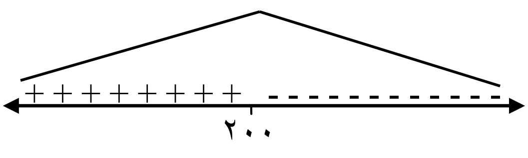
ص = ٤٠٠ − س

م = س × ص   أكبر ما يمكن

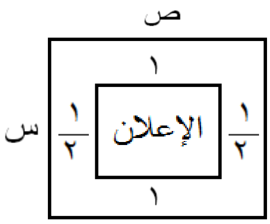
$\text{م} = \text{س}\,(٤٠٠ - \text{س}) \longrightarrow \boxed{\text{م} = ٤٠٠\text{س} - \text{س}^2}$

$\text{م}' = ٤٠٠ - ٢\text{س} = ٠ \longrightarrow \text{س} = ٢٠٠$

ص = ٢٠٠



٥) صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨سم^{٢} ، يراد طباعة إعلان عليها ، إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم ، وفي كل من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم ، فجد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن :



الحل : $س \times ص = ١٢٨$

$$\Rightarrow ص = \frac{١٢٨}{س}$$

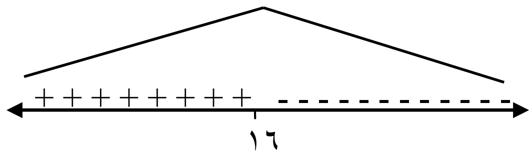
$$م_{\text{الإعلان}} = (س - ٢)(ص - ١)$$

$$\boxed{م = (س - ٢)\left(\frac{١٢٨}{س} - ١\right)}$$

$$م' = (س - ٢)\left(\frac{-١٢٨}{س^{٢}}\right) + \left(\frac{١٢٨}{س} - ١\right)(١) = ٠$$

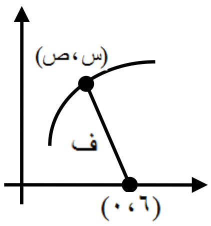
$$\frac{-١٢٨}{س^{٢}} + \frac{٢ \times ١٢٨}{س^{٢}} + \frac{١٢٨}{س} - ١ = ٠$$

$$س^{٢} = ٢ \times ١٢٨ \Rightarrow س^{٢} = ٢٥٦ \Rightarrow س = ١٦$$



$$ص = \frac{١٢٨}{١٦} = ٨$$

٦) جد النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤}$ ، التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٦ ، ٠) :



الحل : $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤}$

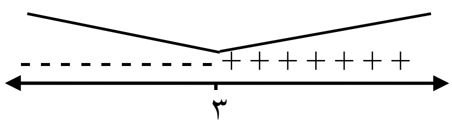
$$ف = \sqrt{(س - ٦)^{٢} + (ص - ٠)^{٢}}$$

$$ف = \sqrt{س^{٢} - ١٢س + ٣٦ + س^{٢} - ٤}$$

$$ف = \sqrt{٢س^{٢} - ١٢س + ٣٢}$$

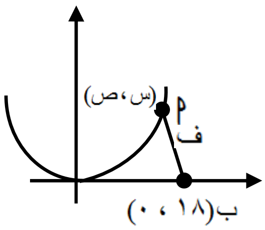
$$ف' = \frac{٤س - ١٢}{٢\sqrt{٢س^{٢} - ١٢س + ٣٢}} = ٠ \Rightarrow ٤س - ١٢ = ٠$$

$$س = ٣$$



$$س = ٣ \Rightarrow ص = \sqrt{٥} \Rightarrow (٣ ، \sqrt{٥})$$

٧) جد إحداثيي النقطة أ(س ، ص) الواقعة على منحنى العلاقة $ص = س^{٢}$ التي بعدها عن النقطة ب(١٨ ، ٠) أقل ما يمكن :



الحل : $ص = س^{٢}$

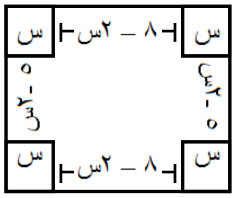
$$ف = \sqrt{(س - ١٨)^{٢} + س^{٤}}$$

$$ف' = \frac{٢(س - ١٨) + ٤س^{٣}}{٢\sqrt{(س - ١٨)^{٢} + س^{٤}}} = ٠$$

$$٢س - ٣٦ + ٤س^{٣} = ٠ \Rightarrow ٢س^{٣} + س - ١٨ = ٠$$

$$س = ٢ \Rightarrow ص = ٤ \Rightarrow \text{النقطة } (٢ ، ٤)$$

٨) يُراد صنع صندوق مفتوح من الأعلى من قطعة ورق مقوى وذلك بقص مربعات متساوية عند رؤوسها ، فإذا كان طول القطعة المستخدمة ٨سم وعرضها ٥سم فجد حجم أكبر صندوق يمكن أن نحصل عليه بهذه الطريقة :



الحل : $ح = (٨ - ٢س)(٥ - ٢س)(س)$

$$ح = (٨ - ٢س)(٥س - ٢س^{٢})$$

$$ح = ٤٠س - ١٦س^{٢} - ١٠س^{٢} + ٤س^{٣}$$

$$ح' = ٤٠ - ٥٢س + ١٢س^{٢} = ٠$$

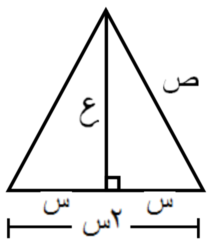
$$١٠ - ١٣س + ٣س^{٢} = ٠$$

$$(٣س - ١٠)(س - ١) = ٠ \Rightarrow س = ١ ، \frac{١٠}{٣}$$

* المطلوب أكبر حجم عندما س =١

$$\therefore ح = ٤٠ - ٢٦ + ٤ = ١٨ \text{سم}^{٣}$$

٩) مثلث متساوي الساقين محيطة ٢٤سم أوجد أكبر مساحة ممكنه :



$$ص^{٢} = س^{٢} + ع^{٢}$$
$$ع = \sqrt{ص^{٢} - س^{٢}}$$
$$٢س + ٢ص = ٢٤$$
$$ص = ١٢ - س$$

الحل : $م = \frac{١}{٢} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$م = \frac{١}{٢} \times ٢س \times ع = س \times ع$$

$$م = س \times \sqrt{ص^{٢} - س^{٢}}$$

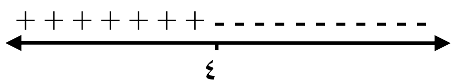
$$م = س \times \sqrt{(١٢ - س)^{٢} - س^{٢}}$$

$$م = س \times \sqrt{١٤٤ - ٢٤س + س^{٢} - س^{٢}}$$

$$م = \sqrt{١٤٤س^{٢} - ٢٤س^{٣}}$$

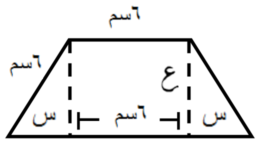
$$م' = \frac{٢٨٨س - ٧٢س^{٣}}{٢\sqrt{١٤٤س^{٢} - ٢٤س^{٣}}} = ٠$$

$$٢٨٨س - ٧٢س^{٢} = ٠ \Rightarrow س = ٤\text{سم}$$



$$م = \sqrt{١٤٤ - ١٦ - ٢٤ \times (٤)^{٣}} = ١٦\sqrt{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

١٠) أوجد أكبر مساحة ممكنه لشبه منحرف له ثلاثة أضلاع متساوية وطول كل منها ٦سم :



$$\text{ع}^2 + \text{س}^2 = ٣٦$$

$$\text{ع} = \sqrt{٣٦ - \text{س}^2}$$

الحل : $\text{م} = \frac{١}{٢}(٢\text{س} + ١٢)\,\text{ع}$

أكبر ما يمكن

$$\text{م} = (\text{س} + ٦)\,\text{ع}$$

$$\text{م} = (\text{س} + ٦)\left(\sqrt{٣٦ - \text{س}^2}\right)$$

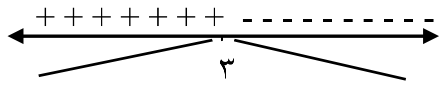
$$\text{م}' = (\text{س} + ٦) \times \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٣٦ - \text{س}^2}} + \left(\sqrt{٣٦ - \text{س}^2}\right) \times ١$$

$$\text{س}^2 + ٦\text{س} = ٣٦ - \text{س}^2 \longrightarrow ٢\text{س}^2 + ٦\text{س} - ٣٦ = ٠$$

$$\text{س}^2 + ٣\text{س} - ١٨ = ٠ \longrightarrow (\text{س} + ٦)(\text{س} - ٣) = ٠$$

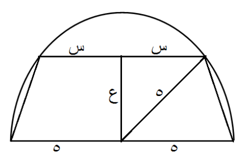
$$\cancel{\text{س} = -٦} \quad ، \quad \text{س} = ٣ \checkmark$$

$$\text{م} = (\text{س} + ٦)\left(\sqrt{٣٦ - \text{س}^2}\right)$$



$\text{م} = ٩\sqrt{٣٦ - ٩} = ٩\sqrt{٢٧}$ وحدة مربعة

١١) دائرة نصف قطرها ٥سم ، أوجد أكبر مساحه لشبه منحرف مرسوم داخلها بحيث يقع الرأسان ب ، ج على نهايتي قطر من الدائرة والرأسان ﻡ ، ء على محيط الدائرة :



$$٢٥ = \text{س}^2 + \text{ع}^2$$

$$\text{ع} = \sqrt{٢٥ - \text{س}^2}$$

الحل : $\text{م} = \frac{١}{٢}(١٠ + ٢\text{س})\,\text{ع}$

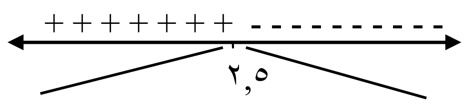
$$\text{م} = (٥ + \text{س})\left(\sqrt{٢٥ - \text{س}^2}\right)$$

$$\text{م}' = (٥ + \text{س}) \times \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٢٥ - \text{س}^2}} + \left(\sqrt{٢٥ - \text{س}^2}\right)$$

$$-١٠\text{س} - ٢\text{س}^2 + ٥٠ - ٢\text{س}^2 = ٠$$

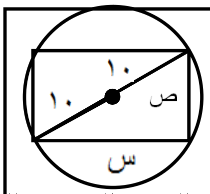
$$-٤\text{س}^2 - ١٠\text{س} + ٥٠ = ٠ \longrightarrow ٤\text{س}^2 + ١٠\text{س} - ٥٠ = ٠$$

$$(٢\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥) = ٠ \longrightarrow \text{س} = ٢{,}٥ \checkmark \text{ ، } \cancel{\text{س} = -٥}$$



$\therefore \text{م} = (٥ + ٢{,}٥)\left(\sqrt{٢٥ - ٦{,}٢٥}\right)$ وحدة مساحة

١٢) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠سم بحيث تنطبق قاعدته على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة :



$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = (٢٠)^2$$

$$\text{ع} = \sqrt{٤٠٠ - \text{ص}^2}$$

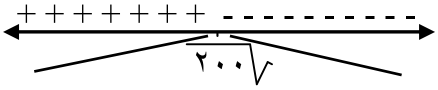
الحل : $\text{م} = \text{س} \times \text{ص}$

$$\text{م} = \sqrt{٤٠٠ - \text{ص}^2} \times \text{ص}$$

$$\text{م}' = \sqrt{٤٠٠ - \text{ص}^2} + \text{ص} \times \frac{-٢\text{ص}}{٢\sqrt{٤٠٠ - \text{ص}^2}}$$

$$٤٠٠ - \text{ص}^2 = \text{ص}^2 \longrightarrow ٢\text{ص}^2 = ٤٠٠$$

$$\text{ص} = \sqrt{٢٠٠}$$

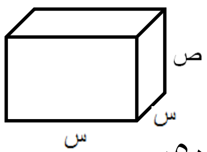


$$\text{س} = \sqrt{٤٠٠ - ٢٠٠} = \sqrt{٢٠٠}$$

$$\therefore \text{م} = \text{س} \times \text{ص} = \sqrt{٢٠٠} \times \sqrt{٢٠٠} = ٢٠٠\text{سم}^2$$

١٣) متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، ومجموع أطوال أحرفه يساوي ٦٠٠سم ، جد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن :

الحل : $٤\text{ص} + ٨\text{س} = ٦٠٠ \longrightarrow \boxed{\text{ص} = ١٥٠ - ٢\text{س}}$

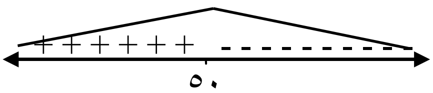


$$\text{ح} = \text{س}^2\text{ص} = \boxed{١٥٠\text{س}^2 - ٢\text{س}^3}$$

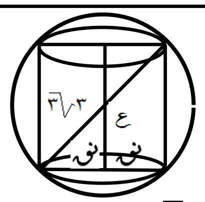
$$\text{ح}' = ٣٠٠\text{س} - ٦\text{س}^2 = ٠$$

$$٦\text{س}(٥٠ - \text{س}) = ٠$$

$$\cancel{\text{س} = ٠} \text{ ، } \text{س} = ٥٠\text{سم} \longrightarrow \text{ص} = ٥٠\text{سم}$$



١٤) جد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم ممكن والتي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها $٣\sqrt{٣}$ سم :



$$(٦\sqrt{٣})^2 = \text{ع}^2 + ٤\,\text{نق}^2$$

$$\text{نق}^2 = \frac{١٠٨ - \text{ع}^2}{٤}$$

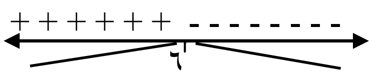
الحل : $\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{٤}\,\text{ع}\,(١٠٨ - \text{ع}^2)$$

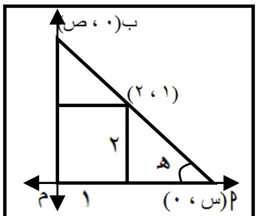
$$\text{ح}' = \frac{١٠٨\pi - ٣\pi\text{ع}^2}{٤} = ٠$$

$$١٠٨\pi = ٣\pi\text{ع}^2$$

$$\text{ع}^2 = \frac{١٠٨}{٣} = ٣٦ \longrightarrow \text{ع} = ٦\text{سم}$$



١٥) مستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢) ويقطع محور السينات في النقطة أ(س ، ٠) حيث س > ٠ ، ويقطع محور الصادات في النقطة ب(٠ ، ص) حيث ص > ٠ ،أوجد أقل مساحة ممكن للمثلث أ ب م حيث م نقطة الأصل :



$\frac{٢}{س - ١} = \frac{ص}{س}$

$ص = \frac{٢س}{س - ١}$

الحل : ∵ $م = \frac{١}{٢} س ص$

$م = \frac{١}{٢} س \left(\frac{٢س}{س - ١} \right)$

$م = \frac{س^٢}{س - ١}$

$م' = \frac{(س - ١)(٢س) - س^٢}{(س - ١)^٢} = ٠$

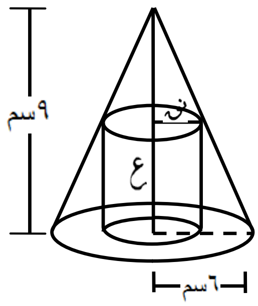
$٢س^٢ - ٢س - س^٢ = ٠ \longrightarrow س^٢ - ٢س = ٠$

$س(س - ٢) = ٠ \longrightarrow \cancel{س = ٠}$ ، $س = ٢$ ✓

- - - - - - - - - - - - + + + + + + + + +
٢

∴ $م = \frac{٤}{٢ - ١} = ٤$ وحدة مربعة

١٦) أوجد أبعاد أكبر اسطوانة يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ٩سم ونصف قطر قاعدته ٦سم :



الحل : المطلوب أكبر حجم

$ح = \pi نق^٢ ع$

$ح = \pi نق^٢ \times \frac{٣}{٢} (٦ - نق)$

$ح = ٩ \pi نق^٢ - \frac{٣}{٢} \pi نق^٣$

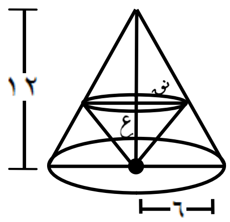
$ح' = ١٨ \pi نق - \frac{٩}{٢} \pi نق^٢$

نق = ٠ ، نق = ٤سم

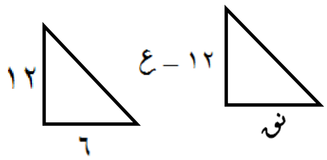
+ + + + + + - - - - - - - -
٤

$ع = \frac{٩}{٦} (٦ - ٤) = ٣$سم

١٧) جد حجم أكبر مخروط دائري يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٦سم ، وارتفاعه ١٢سم ، بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي :



الحل : $ح = \frac{\pi}{٣} نق^٢ ع$ أكبر ما يمكن



$\frac{١٢}{١٢ - ع} = \frac{٦}{نق}$

$٢نق = ١٢ - ع$

$ع = ١٢ - ٢نق$

$ح = \frac{\pi}{٣} (١٢نق^٢ - ٢نق^٣)$

$ح' = \frac{\pi}{٣} (٢٤نق - ٦نق^٢) = ٠$

$ح' = \frac{\pi}{٣} \times ٦نق(٤ - نق) = ٠$

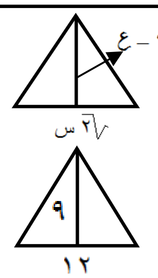
نق = ٠ ✗ ، نق = ٤ ✓

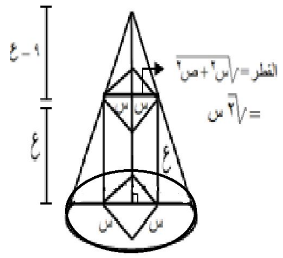
+ + + + + + + - - - - - - - - -
٤

$ح = \frac{\pi}{٣} \times (١٢ \times ١٦ - ١٢٨) = \frac{٦٤\pi}{٣}$سم^٣

١٨) جد أكبر حجم لموشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل ، يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدة المخروط (٦)سم وارتفاعه (٩)سم :

الحل :





$\frac{٩}{٩ - ع} = \frac{١٢}{\sqrt{٢} س}$

$٣٦ - ٤ع = ٣\sqrt{٢} س$

$ع = \frac{٣٦ - ٣\sqrt{٢} س}{٤}$

$ح = س^٢ ع$

$\boxed{ح = \frac{٣٦س^٢ - ٣\sqrt{٢} س^٣}{٤}}$

$ح' = \frac{٧٢س - ٩\sqrt{٢} س^٢}{٤} = ٠$

$٩س(٨ - \sqrt{٢} س) = ٠ \longrightarrow \cancel{س = ٠}$

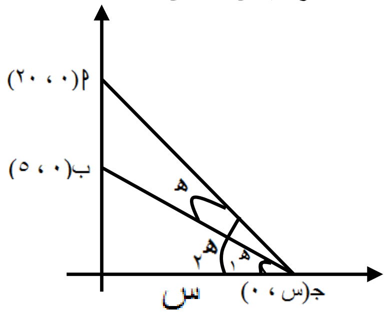
$\longrightarrow س = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢}$ ✓

+ + + + + + + - - - - - - - - -
√٢

$ح = \frac{٣٦ \times ٣٢ - ٣\sqrt{٢} \times ٦٤ \times ٢\sqrt{٢}}{٤}$

$ح = ٩ \times ٣٢ - ١٦ \times ٦ \times ٢ = ٢٨٨ - ١٩٢ = ٩٦$سم^٣

١٩) أ(٠ ، ٢٠) ، ب(٠ ، ٥) نقطتان ثابتتان ، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب ، جد أكبر قياس ممكن للزاوية أ جـ ب :



الحل : هـ أكبر ما يمكن

$\text{هـ} = \text{هـ}_2 - \text{هـ}_1$

$\text{ظاهـ} = \text{ظا}\,(\text{هـ}_2 - \text{هـ}_1)$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{ظاهـ}_2 - \text{ظاهـ}_1}{1 + \text{ظاهـ}_2\ \text{ظاهـ}_1}$$

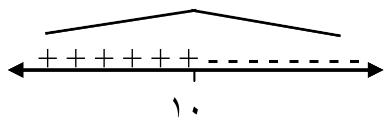
$$\text{ظاهـ} = \frac{\frac{20}{\text{س}} - \frac{5}{\text{س}}}{1 + \frac{20}{\text{س}} \times \frac{5}{\text{س}}} = \frac{\frac{15}{\text{س}}}{1 + \frac{100}{\text{س}^2}} = \frac{\frac{15}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^2 + 100}{\text{س}^2}}$$

$$\boxed{\text{ظاهـ} = \frac{15\text{س}}{\text{س}^2 + 100}}$$

$$(\text{ظاهـ})' = \frac{(\text{س}^2 + 100)(15) - (15\text{س})(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 100)^2} = 0$$

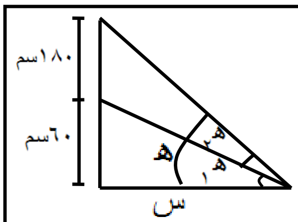
$15(\text{س}^2 + 10 - 2\text{س}^2) = 0 \longrightarrow 15(-\text{س}^2 + 100) = 0$

$\text{س} = 10$



$\text{ظاهـ} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} \longrightarrow \text{هـ} = 36{,}87°$

٢٠) لوحة إعلانات ارتفاعها ١٨٠سم عُلقت على حائط بحيث أن حافتها السفلية أفقية وتعلو ٦٠سم عن مستوى النظر لمشاهد معين ، جد عن أي بعد عن الحائط يجب أن يقف المشاهد لكي يحصل على أوضح منظر لهذه اللوحة :



$\text{ظاهـ} = \frac{240}{\text{س}}$

$\text{ظاهـ}_1 = \frac{60}{\text{س}}$

الحل : $\text{هـ}_2 = \text{هـ} - \text{هـ}_1$

$\text{ظاهـ}_2 = \text{ظا}\,(\text{هـ} - \text{هـ}_1)$

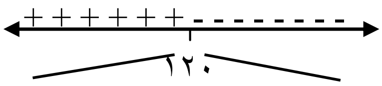
$$\text{ظاهـ}_2 = \frac{\text{ظاهـ} - \text{ظاهـ}_1}{1 + \text{ظاهـ}\ \text{ظاهـ}_1}$$

$$\text{ظاهـ}_2 = \frac{\frac{240}{\text{س}} - \frac{60}{\text{س}}}{1 + \frac{240}{\text{س}} \times \frac{60}{\text{س}}}$$

$\text{ظاهـ}_2 = \frac{180\text{س}}{\text{س}^2 + 144}$ أوضح ما يمكن

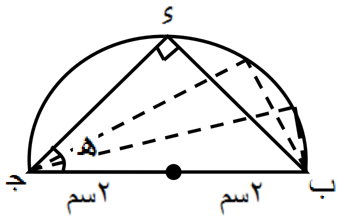
$$(\text{ظاهـ}_2)' = \frac{(\text{س}^2 + 14400) \times 180 - 180\text{س} \times 2\text{س}}{(\text{س}^2 + 144)^2} = 0$$

$\text{س}^2 = 14400 = 0 \longrightarrow \boxed{\text{س} = 120\text{سم}}$



٢١) يمثل الشكل التالي نصف دائرة قطرها جـ ب طوله ٤سم ، ء نقطة تتحرك على محيط نصف الدائرة بادئه حركتها من النقطة ب بعكس عقارب الساعة لترسم مثلثاً قائم الزاوية هو جـ ب ء جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة هذا المثلث أكبر ما يمكن عندما ترسم النقطة ء نصف محيط الدائرة :

الحل :



$\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{ب ء} \times \text{ء جـ}$ (ب ء ، ء جـ متغيران)

$\text{جاهـ} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب جـ}} \longrightarrow \text{ب ء} = \text{ب جـ جاهـ} = 4\ \text{جاهـ}$

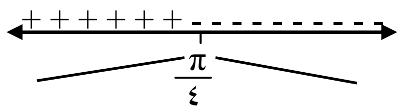
$\text{جتاهـ} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{ب جـ}} \longrightarrow \text{ء جـ} = \text{ب جـ جتاهـ} = 4\ \text{جتاهـ}$

$\text{م} = \frac{1}{2} \times 4\ \text{جاهـ} \times 4\ \text{جتاهـ} = 4\ \text{جا}\ 2\text{هـ}$

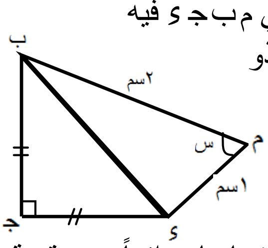
وعندما ترسم ء نصف محيط الدائرة فإن هـ تتغير من (صفر) إلى $(\frac{\pi}{2})$ ويكون م(هـ) قابل للاشتقاق

$\text{مَ(هـ)} = 8\ \text{جتا}\ 2\text{هـ} = 0$

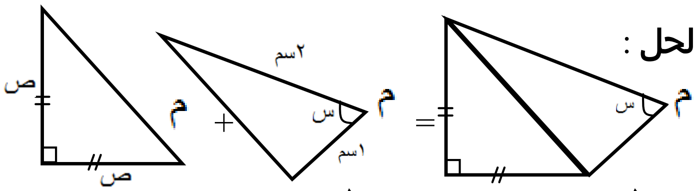
$2\text{هـ} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{4}$



٢٢) يمثل الشكل المجاور الشكل الرباعي م ب ج ء فيه الضلع م ب ثابت وطوله ٢سم ، وفيه م ء ذو طول ثابت قدره ١سم إلا أن وضعه متحرك ، يمكنه أن يدور في مستوى الشكل حول النقطة م ويضع مع الضلع الثابت م ب زاوية قدرها س ، أما الزاوية ء ج ب فهي قائمة والضلعان ج ء ، ج ب متساويان دائماً ، جد قيمة س التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر ما يمكن :



الحل :



$$م = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ \times جاس + \frac{١}{٢} \times ص \times ص$$

$$م = جاس + \frac{١}{٢} ص^٢$$

$$لكن\ \sqrt{١^٢ + ٢^٢ - ٢ \times ٢ \times ١ \times جتاس} = \sqrt{٢}\ ص$$

$$٥ - ٤\ جتاس = ٢ص^٢$$

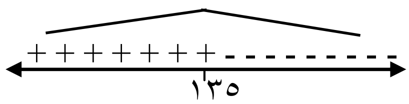
$$ص^٢ = \frac{٥ - ٤جتاس}{٢}$$

$$\therefore م = جاس + \frac{١}{٢} \times \frac{٥ - ٤جتاس}{٢}$$

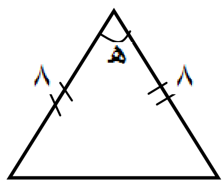
$$م = جاس + \frac{٥}{٤} - جتاس$$

$$مَ = جتاس + جاس = ٠$$

$$جتاس = -جاس \longleftarrow س = ١٣٥$$



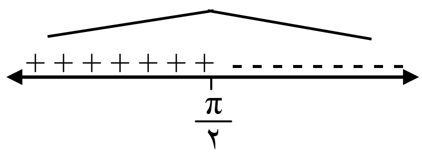
٢٣) نحتاج إلى قص لوح خشبي ، على شكل مثلث متطابق الضلعين ، طول كل منهما ٨سم ، إذا كانت زاوية رأس المثلث هـ متغيرة ، فجد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن :



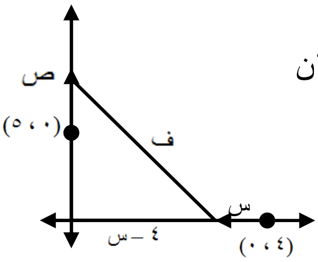
الحل : $م = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \times جا\ هـ$

$$م = ٣٢\ جا\ هـ$$

$$مَ = ٣٢جتاهـ = ٠ \longrightarrow هـ = \frac{\pi}{٢}$$



٢٤) لتكن م هي النقطة (٤ ، ٠) ولتكن ب هي (٠ ، ٥) إذا بدأت نقطة تتحرك بادئه حركتها من م على محور السينات الموجب باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٢سم/ث وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى بالحركة من (ب) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل وبسرعة ١سم/ث جد متى تكون المساحة بين النقطتين أقل ما يمكن :



الحل : $\frac{ءس}{ءن} = ٢ \longrightarrow س = ٢ن$

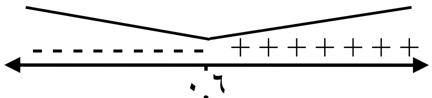
$$\frac{ءص}{ءن} = ١ \longrightarrow ص = ن$$

$$ف = \sqrt{(٤ - ٢ن)^٢ + (ن + ٥)^٢}$$

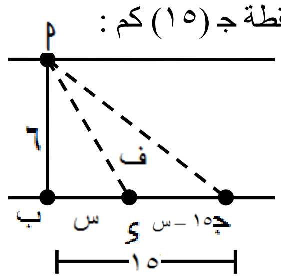
$$فَ = \frac{٢(٤ - ٢ن) \times -٢ + ٢(ن + ٥)}{٢ \times \sqrt{(٤ - ٢ن)^٢}} = ٠$$

$$-١٦ + ٨ن + ٢ن + ١٠ = ٠$$

$$١٠ن - ٦ = ٠ \longrightarrow ن = ٠,٦$$



٢٥) يقف رجل عند النقطة م التي تبعد ٦كم عن النقطة ب ، يريد أن يصل إلى النقطة ج ، مروراً بالنقطة ء ، إذا كان يسير بسرعة ٣كم/ساعة عند الانتقال من النقطة م إلى النقطة ء ، ويسير بسرعة ٦كم/ساعة عند الانتقال من النقطة ء إلى النقطة ج فحدد موقع النقطة ء بحيث يصل في أقصر وقت ممكن ، علماً بأن البعد بين النقطة ب والنقطة ج (١٥) كم :



الحل : $\frac{ءف}{ءن} = ٣كم/س$

$$\frac{ءس}{ءن} = ٦كم/س$$

$ن = ن_١ + ن_٢$ أقل ما يمكن

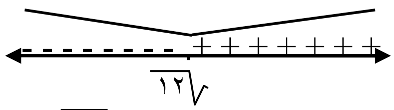
$$ن = \frac{ف}{٣} + \frac{١٥ - س}{٦} \longrightarrow ن = \frac{\sqrt{س^٢ + ٣٦}}{٣} + \frac{١٥ - س}{٦}$$

$$نَ = \frac{١}{٣} \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢ + ٣٦}} + \frac{-١}{٦} = ٠$$

$$\frac{س}{٣\sqrt{س^٢ + ٣٦}} = \frac{١}{٦}$$

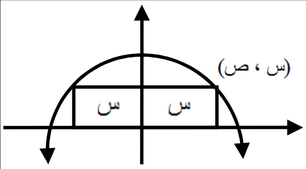
$$٦س = ٣\sqrt{س^٢ + ٣٦} \longrightarrow ٢س = \sqrt{س^٢ + ٣٦}$$

$$٤س^٢ = س^٢ + ٣٦ \longrightarrow س^٢ = ١٢ \longrightarrow س = \sqrt{١٢}$$



النقطة ء تبعد عن ب بمقدار $\sqrt{١٢} = ٢\sqrt{٣}$ كم

٢٦) أوجد أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات حيث يكون أحد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى ص = ١٢ – س^{٢} :



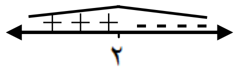
البعد الأول : ٢(س – التماثل)
= ٢(س – ٠)
البعد الثاني : طرح الاقترانين
= ١٢ – س^{٢} - ٠

الحل : م = ٢س (١٢ – س^{٢})

$\boxed{\text{م = ٢٤س – ٢س}^{٣}}$

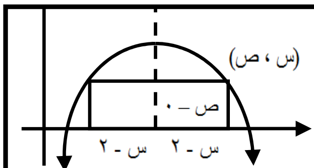
مَ = ٢٤ – ٦س^{٢} = ٠

س = ٢



م = ٤٨ – ١٦ = ٣٢ وحدة مربعة

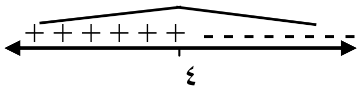
٢٧) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يكون أحد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ص = ٨ – س^{٢} + ٤س :



البعد الأول : ٢(س – ٤)
البعد الثاني : ٨–س^{٢}+٤س-٠

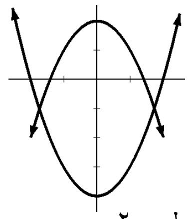
الحل :
م = (٢س – ٤) (٨ – س^{٢} + ٤س)

مَ = (٢س – ٤)(-٢س + ٤) + (٨ – س^{٢} + ٤س)(٢)
= -٦س^{٢} + ٢٤س = ٠ ⟵ س = $\cancel{٠}$ ، ٤



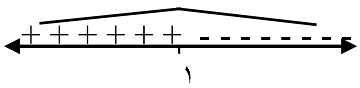
م = ٤ × ٨ = ٣٢ وحدة مربعة

٢٩) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يكون رأساه على منحنى الاقتران ص$_{١}$ = ٢ – س^{٢} ورأساه الآخران على ص$_{٢}$ = س^{٢} - ٤ :



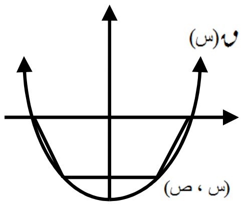
البعد الأولى : ٢س
البعد الثاني : ٢ – س^{٢} - س^{٢} + ٤
= ٦ – ٢س^{٢}

الحل : م = ٢س (٦ – ٢س^{٢})
م = ١٢س – ٤س^{٣}
مَ = ١٢ – ١٢س^{٢} = ٠
س = ١



م = ١٢ - ٤ = ٨ وحدة مساحة

٢٨) جد أكبر مساحة ممكنة لشبة منحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٤ :



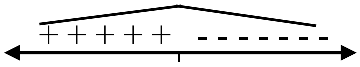
الحل : ق$_{١}$: ٢(س – التماثل) = ٢(س – ٠) = ٢س

ق$_{٢}$: تقاطع الاقترانين : س^{٢} - ٤ = ٠
س^{٢} = ٤ ⟵ س = ±٢
: ٢ - -٢ = ٤
ع ∴ – س^{٢} + ٤- ٠ = - س^{٢} + ٤

م = $\frac{١}{٢}$ (٢س + ٤)(- س^{٢} + ٤)

$\boxed{\text{م = (س + ٢) (- س}^{٢}\text{ + ٤)}}$

مَ = (س + ٢)(-٢س) + (- س^{٢} + ٤)(١) = ٠
= -٢س^{٢} - ٤س – س^{٢} + ٤
-٣س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠
٣س^{٢} + ٤س – ٤ = ٠
(٣س – ٢) (س + ٢) = ٠
س = $\frac{٢}{٣}$

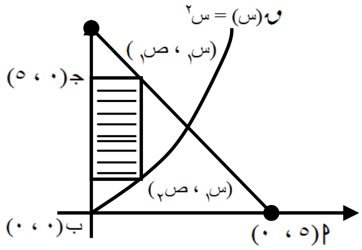


$\frac{٢}{٣}$

م = ($\frac{٢}{٣}$ + ٢) (-$\frac{٤}{٩}$ + ٤) = $\frac{٨}{٣}$ × $\frac{٣٢}{٩}$

= $\frac{٢٥٦}{٢٧}$ وحدة مربعه

٢٩) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية إحداثيات رؤوسه أ(٥ ، ٠) ، ب(٠ ، ٠) ، جـ(٠ ، ٥) رسم داخله مستطيل ينطبق رأسان من رؤوسه على الضلع ب جـ وأحد رأسيه الآخرين على الضلع أجـ ورأس الآخر على منحنى ق(س) = $س^{٢}$ كما في الشكل التالي جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل المظلل :



الحل : معادلة الخط المستقيم :

$م = \frac{٥-٠}{٠-٥} = -١ \longrightarrow ص - ٠ = -١(س - ٥) \longrightarrow \boxed{ص = -س + ٥}$

$م_{\text{المساحة}} = (س_١ - ٠)(ص_١ - ص_٢) = (س_١)(ص_١ - ص_٢)$

$= (س_١)(-س_١ + ٥ - س_١^{٢})$

$\boxed{م = -س_١^{٢} + ٥س_١ - س_١^{٣}}$

$م' = -٢س_١ + ٥ - ٣س_١^{٢} \longrightarrow ٣س_١^{٢} + ٢س_١ - ٥ = ٠$

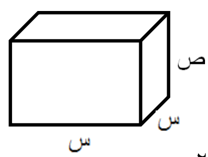
$(٣س_١ + ٥)(س_١ - ١) = ٠$

$\boxed{س_١ = ١}$

+ + + + + + - - - - - - -
١

$م = -١ + ٥ - ١ = ٣$ وحدة مربعة

٣٠) يراد صنع صندوق من الخشب الرقيق بدون غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، جد أكبر حجم ممكن للصندوق بحيث تبلغ تكاليف صناعته ١٤٤دينار علماً بان تكاليف صنع المتر المربع الواحد من الخشب الرقيق ٣ دنانير :



$٣ \times س^{٢} + ٣ \times ٤س\,ص = ١٤٤$

$س^{٢} + ٤س\,ص = ٤٨$

$ص = \frac{٤٨ - س^{٢}}{٤س}$

الحل : $ح = س^{٢}\,ص$

$ح = س^{٢} \times \frac{٤٨ - س^{٢}}{٤س}$

$ح = \frac{٤٨س - س^{٣}}{٤}$

$ح' = \frac{٤٨ - ٣س^{٢}}{٤} = ٠$

$٣س^{٢} = ٤٨ \longrightarrow س^{٢} = ١٦$

$\boxed{س = ٤}$

+ + + + + + - - - - - - -
٤

$ح = \frac{٤٨ \times ٤ - ٦٤}{٤} = ٤٨ - ١٦ = ٣٢م^{٣}$

٣١) مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج س جهازاً سنوياً يبيع كل جهاز بسعر (٢٠٠ − ٠,٠١س) دينار ، فإذا تكلفة إنتاج هذه الأجهزة (٥٠س + ٢٠) دينار ، فكم جهازاً ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنوياً :

الحل : الربح = الإيراد − التكاليف

$= (٢٠٠ - ٠,٠١س)س - (٥٠س + ٢٠)$

$= ٢٠٠س - ٠,٠١س^{٢} - ٥٠س - ٢٠$

$ر(س) = -٠,٠١س^{٢} + ١٥٠س - ٢٠$

$ر'(س) = -٠,٠٢س + ١٥٠ = ٠$

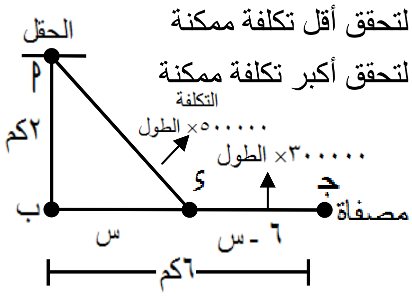
$س = \frac{١٥٠}{٠,٠٢} = ٧٥٠٠$ جهاز

+ + + + + + - - - - - -
٧٥٠٠

٣٢) يقع حقل نفط في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٢كم عن أقرب نقطة ب على الساحل ، وأردنا أن نضخ البترول من الحقل إلى المصفاة التي تقع عند النقطة جـ على الساحل ، وتبعد ٦كم من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة ء على الساحل ، ثم بواسطة أنابيب على اليابسة على خط مستقيم من ء إلى جـ ، على فرض أن الأنابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد ، إذا كانت تكلفة الأنابيب تحت سطح البحر ٥٠٠٠٠٠دينار لكل كيلومتر وعلى اليابسة ٣٠٠٠٠٠دينار لكل كيلومتر / فأجب عما يأتي :

١) أين يجب أن تكون ء لتحقق أقل تكلفة ممكنة

٢) أين يجب أن تكون ء لتحقق أكبر تكلفة ممكنة



الحل : التكلفة $= ٥٠٠٠٠٠\sqrt{س^{٢} + ٤} + ٣٠٠٠٠٠(٦ - س)$

$ت(س) = ١٠٠٠٠٠(٥\sqrt{س^{٢} + ٤} + ١٨ - ٣س)$

$ت'(س) = ١٠٠٠٠٠\left(\frac{٥ \times ٢س}{٢ \times \sqrt{س^{٢} + ٤}} - ٣\right) = ٠$

$\frac{٥ \times ٢س}{٢ \times \sqrt{س^{٢} + ٤}} = ٣$

$٢٥س^{٢} = ٩س^{٢} + ٣٦$

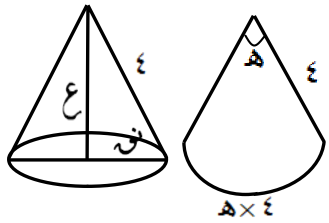
$١٦س^{٢} = ٣٦ \longrightarrow س^{٢} = \frac{٣٦}{١٦} \longrightarrow س = \frac{٣}{٢}$

- - - - - - + + + + +
٠   $\frac{٣}{٢}$ ٦

أقل تكلفة عندما $س = \frac{٣}{٢}$

أكبر تكلفة عندما س = ٦

٣٣) قطاع دائري قياس زاويته المركزية هـ بالتقدير الدائري ، وطول نصف قطر دائرته ٤ وحدات ، حول إلى مخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته نق ، وارتفاعه ع ، جد قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن :



$١٦ = \text{نق}^٢ + \text{ع}^٢$

$\text{نق}^٢ = ١٦ - \text{ع}^٢$

الحل :

$\text{ح} = \frac{\pi}{٣}\,\text{نق}^٢\,\text{ع}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{٣}\,(١٦ - \text{ع}^٢)\,(\text{ع})$

$\text{ح} = \frac{\pi}{٣}\,(١٦\text{ع} - \text{ع}^٣)$

$\text{ح}' = \frac{\pi}{٣}\,(١٦ - ٣\text{ع}^٢) = ٠$

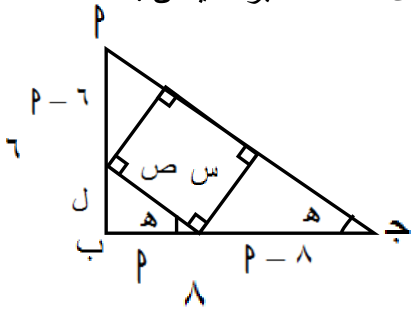
$\text{ع} = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$ ، $\text{نق}^٢ = ١٦ - \frac{١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$

$٤\text{هـ} = ٢\,\pi\,\text{نق} \longrightarrow ٤\text{هـ} = ٢\pi \times \sqrt{\frac{٣٢}{٣}}$

$\text{هـ} = \frac{\pi}{٢}\sqrt{\frac{٣٢}{٣}}$

---

٣٤) يمثل الشكل مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كل منهما على ضلعي القائمة . جد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن :



الحل : م = س × ص

$\text{م} = ٨\text{ل} - \text{ل}\,\text{أ}$

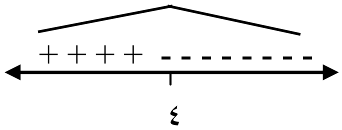
$\text{م} = \text{ل}\,(٨ - \text{أ})$

$\text{م} = \frac{٣}{٤}\,\text{أ}\,(٨ - \text{أ})$

$\boxed{\text{م} = ٦\text{أ} - \frac{٣}{٤}\text{أ}^٢}$

$\text{م}' = ٦ - \frac{٣}{٢}\,\text{أ} = ٠$

$\text{أ} = ٦ \times \frac{٢}{٣} = ٤$



$\text{ظاهـ} = \frac{٦}{٨} = \frac{\text{ل}}{\text{أ}}$

$\text{ل} = \frac{٣}{٤}\,\text{أ}$

$\text{جاهـ} = \frac{\text{ص}}{٨ - \text{أ}} = \frac{\text{ل}}{\text{س}}$

$\text{س ص} = ٨\text{ل} - \text{ل}\,\text{أ}$

$\text{م} = ٢٤ - ١٢ = ١٢\text{سم}^٢$

* اقرأ ..... واستمتع

ياهلا امتحان الرياضيات لكم ذرفت
فيه العيون دمعاً من مآقينــا

يوم على الدهر مشهود فهل عَمِلت
بمثله الأيام من بلاوينــا

شهدت في الدرس أياماً ملونة
فما رأيت سواه اليوم يغنينــا

في الحجوم غرقنا أين منقذنا
وفي المساحات تهنا أين حامينــا

وفي العلاقات أبدعنا محاورها
وفي المجموعات عمنا أين هادينــا

وفي مطلق الجذر أطلقنا أعنته
وفي الصحيح قلبنا صاده سينــا

الاشتقاق وكم باللفظ من شبه
بالاشتقاق وما في اللفظ ما فينــا

لكنها سهلة إما نقارنها
بالمقادير وما هذا بكافينــا

بيتنا كأن الزمان اليوم يعجزنا
حتى بلغنا من العمر الثمانينــا

يارب رحماك إن هذا العقل مندثر
فإنه عام الردى وأرحم يا رب المساكينــا

وإذا دعوت بصفر في معادلة
أجابني الصفر في الأوراق آمينــا

خضر أصابعنا زرق محابرنا
حمر دوائرنا سود آمانينــا

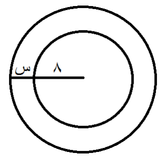
* أسئلة متنوعة :

١) كرة حديدية قطرها يساوي ١٦سم مغطاة بطبقة منتظمة من الجليد وكان الجليد يذوب بمعدل ١٠سم^{٣}/ د أوجد

أ) معدل التغير في سمك الجليد عندما سمكه = ٢سم

ب) معدل التغير في مساحة السطح الخارجي لطبقة الجليد

الحل : $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -١٠$ ، س = ٢ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ مطلوبة



$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -١٠$سم^{٣}/ ث

أ) حجم الجليد = حجم الحديد مع الجليد – حجم كرة الحديد

$\text{ع} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{نق}_{١}^{٣} - \frac{٤}{٣}\pi\,\text{نق}^{٣}$

$\text{ع} = \frac{٤}{٣}\pi\,((\text{س} + ٨)^{٣} - (٨)^{٣})$

* لاحظ أن حجم كرة الحديد ثابت

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣\,(٨ + \text{س})^{٢}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} - ٠$

$-١٠ = ٤\pi(١٠٠)\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} \longleftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{-١}{٤٠\pi}$ سم/د

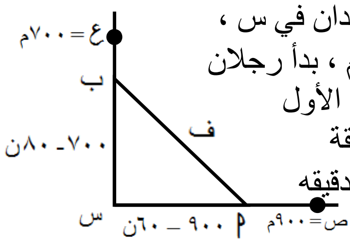
ب) مساحة سطح الجليد = مساحة سطح الدائرة الكبرى

$\text{م} = ٤\pi\,\text{نق}^{٢} \longleftarrow \text{م} = ٤\pi\,(\text{س} + ٨)^{٢}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨\pi\,(\text{س} + ٨)\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨\pi(١٠) \times \frac{-١}{٤٠\pi} = -٢$سم^{٢}/ د

٢) س ص ، س ع طريقان متعامدان في س ، س ص = ٩٠٠م ، س ع = ٧٠٠م ، بدأ رجلان الحركة في نفس الوقت بتجاه س ، الأول بدأ من ص بسرعة (٦٠) متر/دقيقة والآخر من ع بسرعة (٨٠) متر /دقيقه أوجد معدل التغير في مساحة المثلث الناتج من حركتها مع النقطة س بعد (٨) دقائق من حركتها :



الحل : نفرض أن الاثنان سارا زمناً قدره : ن دقيقة

المسافة أ س = ٩٠٠ – ٦٠ن

المسافة ب س = ٧٠٠ – ٨٠ن

$\therefore \text{م} = \frac{١}{٢}\,(٩٠٠ - ٦٠\text{ن})(٧٠٠ - ٨٠\text{ن})$

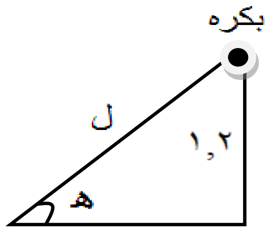
$\text{م} = \frac{١}{٢}\,(٦٣٠٠٠٠ - ٧٢٠٠٠\text{ن} - ٤٢٠٠٠\text{ن} + ٤٨٠٠\text{ن}^{٢})$

$\text{م} = \frac{١}{٢}\,(٤٨٠٠\text{ن}^{٢} - ١١٤٠٠٠\text{ن} + ٦٣٠٠٠٠)$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}\,(٤٨٠٠ \times ٢\text{ن} - ١١٤٠٠٠)$ ، عندما ن = ٨

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢} \times ٢(٤٨٠٠ \times ٨ - ٥٧٠٠٠) = -١٨٦٠٠$م^{٢}/ د

٥) يقف رجل على رصيف حوض للسفن، ويسحب حبلاً أحد طرفيه متصلاً بقارب وطرفه الآخر يمر ببكرة ترتفع (١,٢) متر عن خط سير القارب فإذا كانت سرعة تزايد الزاوية بين خط سير القارب والحبل تساوي $\frac{٣}{٢٠}$ راديان / ثانية عندما كان القارب على بعد (١,٦) متراً عن الرصيف ، فما السرعة التي يسحب بها الرجل الحبل :



الحل : جاهـ = $\frac{١,٢}{\text{ل}}$

ل = ١,٢ قتاهـ

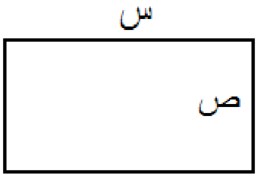
$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -١,٢$ قتاهـ ظتاهـ $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

$= -١,٢ \times \frac{٢}{١,٢} \times \frac{١,٦}{١,٢} \times \frac{٣}{٢٠}$

$= -٢ \times \frac{١٦}{١٢} \times \frac{٣}{٢٠} = \frac{-٢}{٥} = -٠,٤$ م/ث

٦) مستطيل مساحته ١٠٠سم^{٢} ، إذا ازداد طولا ضلعين متوازيين فيه بمعدل ٢سم/ث ، وتناقص طولا الضلعين الآخرين بحيث تظل مساحته ثابتة فجد بعدي المستطيل في اللحظة التي يتوقف فيها محيط المستطيل عن التناقص :

الحل : $\frac{دل}{دن} = ٠$ ، $\frac{دس}{دن} = ٢$سم ، س = ؟؟



$س\,ص = ١٠٠ \longrightarrow ص = \frac{١٠٠}{س}$

$ل = ٢س + ٢ص$

$ل = ٢س + \frac{٢٠٠}{س}$

$$\frac{دل}{دن} = ٢\,\frac{دس}{دن} + \frac{-٢٠٠\,\frac{دس}{دن}}{س^{٢}}$$

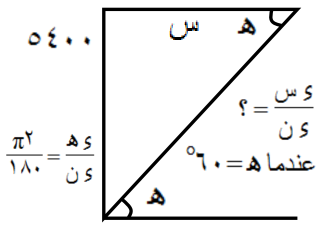
$$٠ = ٢ \times ٢ + \frac{٤٠٠}{س^{٢}}$$

$\frac{٤٠٠}{س^{٢}} = ٤ \longrightarrow س^{٢} = ١٠٠ \longrightarrow س = ١٠$سم

$\longrightarrow ص = \frac{١٠٠}{س} \longrightarrow ص = ١٠$سم

٧) طائرة على ارتفاع ٥٤٠٠متر ، تطير في خط مستقيم بسرعة ثابتة ، تمر فوق مشاهد على الأرض ، في لحظة ما لاحظ المشاهد أن زاوية ارتفاع الطائرة ٦٠° وتزداد بمعدل ٢°/ ث ، جد سرعة الطائرة :

الحل : ظتاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{س}{٥٤٠٠}$



س = ٥٤٠٠ظتاهـ

$$\frac{دس}{دن} = -٥٤٠٠\,قتا^{٢}هـ\,\frac{دهـ}{دن}$$

$$\left.\frac{دس}{دن}\right|_{هـ=٦٠°} = -٥٤٠٠ \times \frac{١}{جا^{٢}٦٠} \times \frac{\pi}{٩٠}$$

$$= -٥٤٠٠ \times \frac{١}{\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}} \times \frac{\pi}{٩٠}$$

$$= -٥٤٠٠ \times \frac{٤}{٣} \times \frac{\pi}{٩٠} = -٨٠\,\pi \text{ م/ث}$$

س: المسافة التي قطعتها الطائرة
هـ: زاوية ارتفاع الطائرة

٨) طريق للسباق دائري الشكل نصف قطرة ثابت **نو** وفي مركزة كشاف ضوئي ويوجد جدار مستقيم طويل يمس الطريق في إحدى النقاط وتسير سيارة على الطريق بسرعة ١٥٠كم/ساعة وفي لحظة ما كانت السيارة عند نقطة التماس ، أوجد سرعة ظل السيارة عندما تكون السيارة قد قطعت ثمن ($\frac{١}{٨}$) دورة :

الحل :

$\boxed{\text{س : ظل السيارة ، ل : المسافة المقطوعة من السيارة}}$

$\frac{دل}{دن} = ١٥٠$ كم/ساعة ، $\frac{دس}{دن}$ مطلوبة

هـ $= \frac{١}{٨} \times ٢\pi$ ، قا^{٢}هـ : مطلوبة ، $\frac{دهـ}{دن}$: مطلوبة

ظاهـ $= \frac{س}{نو} \longrightarrow$ قا^{٢}هـ $\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{نو} \times \frac{دس}{دن}$

لكن جتاهـ = جتا $\frac{٢\pi}{٨}$ = جتا $\frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا^{٢}هـ $= \frac{١}{٢} \longrightarrow \therefore$ قا^{٢}هـ = ٢

بما أن ل = **نو** × هـ $\longrightarrow \frac{دل}{دن} =$ **نو** $\times \frac{دهـ}{دن}$

١٥٠ = **نو** $\times \frac{دهـ}{دن} \longrightarrow \frac{دهـ}{دن} = \frac{١٥٠}{نو}$

قا^{٢}هـ $\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{نو} \times \frac{دس}{دن} \longrightarrow ٢ \times \frac{١٥٠}{نو} = \frac{١}{نو}\,\frac{دس}{دن}$

$$\frac{دس}{دن} = \frac{٣٠٠\,نو}{نو} = ٣٠٠$$

٩) كشاف ضوئي في البحر يدور دورة كاملة كل دقيقة في مقابلة شاطىء مستقيم وأقرب نقطة على الشاطىء إلى الكشاف هي على بعد $\frac{١}{٢}$ كم ، جد السرعة التي يسير بها ضوء الكشاف عندما يكون الضوء على بعد ١كم عن أقرب نقطة على الشاطىء الكشاف :

الحل : $\text{ظاهـ} = \frac{\text{س}}{\frac{١}{٢}}$

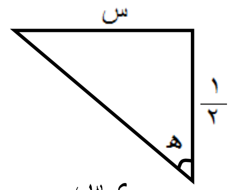
$\text{ظاهـ} = ٢\text{س}$

$\text{قا}^٢\text{هـ} \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = ٢ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$٥ \times ٢\pi = ٢ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

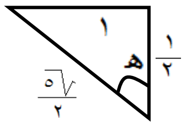
$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{٥ \times ٢\pi}{٢}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٥\pi$



$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = ٢\pi$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ مطلوبة

$\text{س} = ١$ ، $\text{قا}^٢\text{هـ}$: مطلوبة

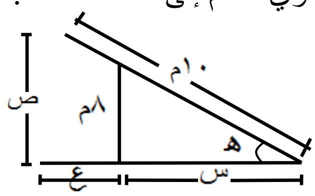


$\text{جتاهـ} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٥}}{٢}}$

$\text{جتاهـ} = \frac{١}{\sqrt{٥}} \leftarrow \text{قاهـ} = \sqrt{٥}$

١٠) سلم طوله ١٠م ، يستند على حائط ارتفاعه ٨م بحيث طرفه العلوي بارز على طرف الحائط ،يتحرك الطرف السفلي للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣م/د ، جد معدل تناقص ارتفاع الطرف العلوي للسلم عندما يصل الطرف العلوي للسلم إلى حافة الحائط :

الحل :



$١٠٠ = \text{ص}^٢ + (\text{س} + \text{ع})^٢$

$\text{ظاهـ} = \frac{٨}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{ع}}$

$٨(\text{س} + \text{ع}) = \text{س ص} \leftarrow \text{س} + \text{ع} = \frac{\text{س ص}}{٨}$

$١٠٠ = \text{ص}^٢ + \frac{\text{س}^٢\text{ص}^٢}{٦٤} \leftarrow ١٠٠ = \text{ص}^٢(١ + \frac{\text{س}^٢}{٦٤})$

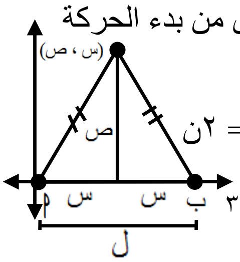
$\text{ص}^٢ = \frac{١٠٠}{\frac{٦٤ + \text{س}^٢}{٦٤}} \leftarrow \text{ص} = \frac{١٠ \times ٨}{\sqrt{٦٤ + \text{س}^٢}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-٨٠ \times \frac{٢\text{س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{٦٤ + \text{س}^٢}}}{٦٤ + \text{س}^٢}$

لكن س عندما ص = ٨ $\leftarrow ١٠٠ = ٦٤ + \text{س}^٢ \leftarrow \text{س} = ٦$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-٨٠ \times ٦ \times ٣}{١٠ \times ١٠٠} = -١,٤٤$ م/د

١١) بدأت النقطتان ب ، جـ الحركة معاً من نقطة الأصل (م) بحيث تتحرك النقطة (ب) على محور السينات الموجب بسرعة ٤ وحدة /ث وتتحرك النقطة جـ في المربع الأول على منحنى ص = س^٢ بحيث يبقى دائماً طول جـ ب = م جـ ، أوجد معدل التغير في مساحة المثلث م ب جـ بعد ثانيتين من بدء الحركة للنقطتين ب ، جـ :



الحل : $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = ٤$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢ \leftarrow \text{س} = ٢\text{ن}$

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٢\text{س} \times \text{ص} = \text{س} \times \text{س}^٢ = \text{س}^٣$

$\text{م} = ٨\text{ن}^٣ \leftarrow \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢٤\text{ن}^٢ \leftarrow ٢٤ \times ٤ = ٩٦$

١٢) يراد صنع خزان على شكل متوازي مستطيلات حجمه ١٠م^٣ بحيث يكون مفتوحاً من الأعلى وتكون قاعدته على شكل مربع فإذا كانت تكاليف المتر المربع الواحد من القاعدة (٥) دنانير وتكاليف المتر المربع الواحد من الجوانب ديناران ، أوجد أبعاد الخزان بحيث تكون تكلفته الإنشائية أقل ما يمكن :

الحل : $\text{ت} = ٥\text{س}^٢ + ٢ \times ٤\text{س ص}$

$\text{ت} = ٥\text{س}^٢ + ٨\text{س ص}$ أقل ما يمكن

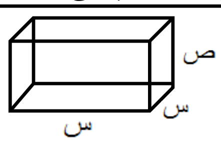
$\text{ت} = ٥\text{س}^٢ + ٨\text{س} \times \frac{١٠}{\text{س}^٢}$

$\text{ت} = ٥\text{س}^٢ + \frac{٨٠}{\text{س}}$

$\text{تَ} = ١٠\text{س} - \frac{٨٠}{\text{س}^٢}$

$\text{س}^٣ = ٨ \leftarrow \text{س} = ٢\text{م}$

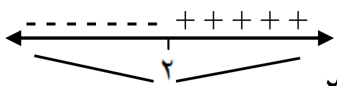
$\text{ص} = \frac{١٠}{\text{س}^٢} = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥\text{م}$



$\text{الحجم} = ١٠ = \text{س}^٢\text{ص}$

$\text{مساحة القاعدة} = \text{س}^٢$

$\text{مساحة الجوانب} = ٤\text{س}$



١٣) علبة على شكل متوازي مستطيلات قاعدتها مستطيلة الشكل طولها ٣ أضعاف عرضها إذا كان ارتفاعها ومحيط قاعدتها تساوي ٩٨سم أوجد عرض العلبة عندما يكون حجمها أكبر ما يمكن :

الحل : ح = س ص ع أكبر ما يمكن

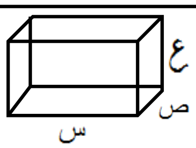
$\text{ح} = ٣\text{ص}^٢(٩٨ - ٨\text{ص})$

$\text{ح} = ٢٩٤\text{ص}^٢ - ٢٤\text{ص}^٣$

$\text{حَ} = ٥٨٨\text{ص} - ٧٢\text{ص}^٢ = ٠$

$\text{ص}(٥٨٨ - ٧٢\text{ص}) = ٠$

$\text{ص} = ٠$ ، $\frac{٥٨٨}{٧٢}$

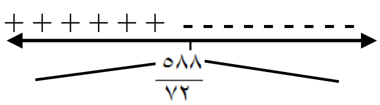


$\text{س} = ٣\text{ص}$

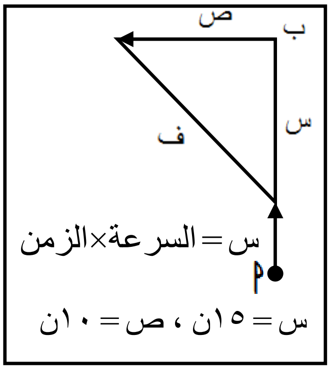
ارتفاعها ومحيط قاعدتها

$\text{ع} + ٢\text{س} + ٢\text{ص} = ١٨$

$\text{ع} = ٩٨ - ٨\text{ص}$



١٤) في الوحدة بعد الظهر كانت الباخرة م على بعد ٣٠كم من الباخرة ب إلى الجنوب منها وتسير غرباً بسرعة ١٥كم/س فإذا كانت الباخرة تسير غرباً بسرعة ١٠كم/س متى تكون المسافة أقل ما يمكن :



الحل : ف = √((٣٠ - س)^{٢} + ص^{٢})

ف = √((٣٠ - ١٥ن)^{٢} + ١٠٠ن^{٢})

ف = √(٩٠٠ - ٩٠٠ن + ٣٢٥ن^{٢})

فَ = (-٩٠٠ + ٦٥٠ن) / (٢√(٩٠٠ - ٩٠٠ن + ٣٢٥ن^{٢}))

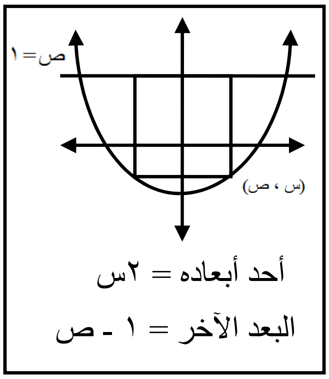
فَ = ٠ ⟵ ٦٥٠ن = ٩٠٠ ⟵ ن = ٩٠٠/٦٥٠

ن = ١٨/١٣

- - - - - - - - + + + + + +
١٨/١٣

ف = √(٩٠٠ - ٩٠٠ × ١٨/١٣ + ٣٢٥(١٨/١٣)^{٢})

١٤) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يكون أحد أبعاده على المستقيم ص = ١ ورأساه الآخران على منحنى الاقتران س^{٢} - ٢ :



الحل : م = ٢س(١ – ص)

م = ٢س(١ – (س^{٢} - ٢))

م = ٢س(١ – س^{٢} + ٢)

م = ٢س(٣ – س^{٢})

م = ٦س - ٢س^{٣}

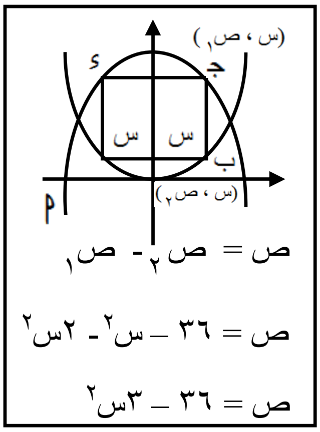
مَ = ٦ – ٦س^{٢} = ٠

س^{٢} = ١ ⟵ س = ١

+ + + + + + - - - - - - - - -
١

المطلوب الماسحة : م = ٦ × ١ – ٢ × (١)^{٣} = ٤ وحدة مربعة

١٩) م ب جـ ى مستطيل يقع داخل المنحنيين ق(س) = ٢س^{٢} ، هـ(س) = ٣٦ – س^{٢} بحيث أن رأسيه م ، ب يقعان على منحنى ق(س) ، ورأسيه جـ ، ى يقعان على منحنى هـ(س) ، جد بعدي المستطيل م ب جـ ى والتي يمكن رسمها لتكون مساحته أكبر ما يمكن :



الحل : م = ٢س ص

م = ٢س(٣٦ – ٣س^{٢})

م = ٧٢س – ٦س^{٣} أكبر ما يمكن

مَ = ٧٢ – ١٨س^{٢} = ٠

س^{٢} = ٧٢/١٨ = ٤ ⟵ س = ٢

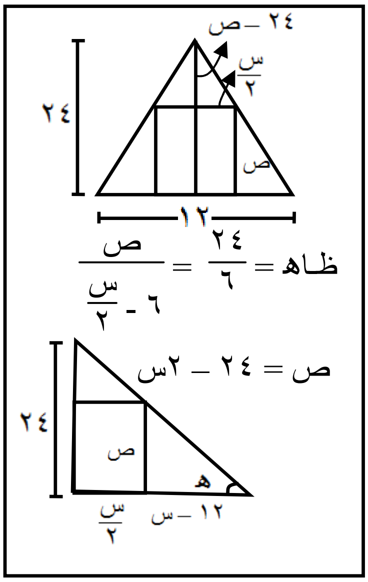
المطلوب أبعاد المستطيل

س = ٢ ، ص = ٣٦ – ١٢ = ٢٤

+ + + + - - - - - -
٢

الأبعاد (٢ × ٢) ، ٢٤ = ٤ ، ٢٤

١٦) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه في مثلث متساوي الساقين قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٢٤سم :



الحل : م = س × ص

م = س × (٢٤ – ٢س)

م = ٢٤س – ٢س^{٢}

مَ = ٢٤ – ٤س = ٠

س = ٦ ، ص = ١٢

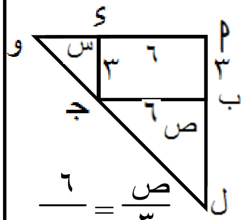
+ + + + + + - - - - - - - -
٦

م = س × ص

م = ٦ × ١٢ = ٧٢سم^{٢}

١٧) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٣سم ، ب جـ = ٦سم رُسم مستقيم يمر بالنقطة جـ ويقطع امتداد أ ء في و وامتداد أ ب في ل ، جد أصغر مساحة ممكنه للمثلث أ ل و :

الحل : $\text{م} = \frac{١}{٢}(\text{س} + ٦)(\text{ص} + ٣)$



$\frac{\text{ص}}{٣} = \frac{٦}{\text{س}}$

$\text{ص} = \frac{١٨}{\text{س}}$

$\text{م} = \frac{١}{٢}(\text{س} + ٦)(\frac{١٨}{\text{س}} + ٣)$

$\text{م} = \frac{١}{٢}(٣٦ + ٣\text{س} + \frac{١٠٨}{\text{س}})$

$\text{م} = ١٨ + \frac{٣}{٢}\text{س} + \frac{٥٤}{\text{س}}$

$\text{م}' = \frac{٣}{٢} - \frac{٥٤}{\text{س}^٢} = ٠$

$\frac{٥٤}{\text{س}^٢} = \frac{٣}{٢} \longrightarrow \text{س}^٢ = ٣٦ \longrightarrow \text{س} = ٦$

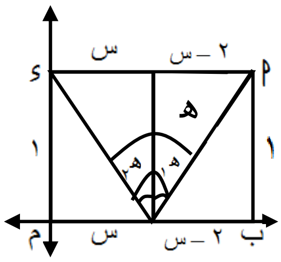
- - - - - - - - + + + + +
٦

$\text{م} = ١٨ + \frac{٣}{٢} \times ٦ + \frac{٥٤}{٦}$

$\text{م} = ١٨ + ٩ + ٩ = ٣٦\text{سم}^٢$

١٨) يمثل الشكل المجاور المستطيل أ ب م ء حيث ب(٢ ، ٠) ، ء(٠ ، ١) إذا فرضت النقطة جـ على الضلع م ب وعلى بعد س سم من نقطة الأصل م ، ووصل جـ أ فتكونت الزاوية المتغيرة هـ جد قيمة س التي تجعل هـ في نهايتها العظمى :

الحل : في الربع الأول كلما زادت الزاوية زاد ظلها أو زاد جيبها وهناك طريقتان للحل هما



* باستخدام الظل :

$\text{هـ} = \text{هـ}_١ + \text{هـ}_٢$

$\text{ظاهـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_١ + \text{هـ}_٢)$

$\text{ظاهـ} = \frac{\text{ظاهـ}_١ + \text{ظاهـ}_٢}{١ - \text{ظاهـ}_١\,\text{ظاهـ}_٢}$

$= \frac{٢ - \text{س} + \text{س}}{١ - (٢ - \text{س})(\text{س})}$

$\text{ظاهـ} = \frac{٢}{١ - ٢\text{س} + \text{س}^٢}$

$\text{ظاهـ}_١ = ٢ - \text{س}$

$\text{ظاهـ}_٢ = \text{س}$

$\text{أ جـ} = \sqrt{١ + (٢ - \text{س})^٢}$

$\text{ء جـ} = \sqrt{\text{س}^٢ + ١}$

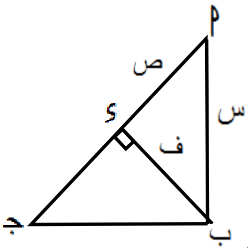
$(\text{ظاهـ})' = \frac{-٢(-٢ + ٢\text{س})}{(١ - ٢\text{س} + \text{س}^٢)^٢} = ٠ \longrightarrow ٤\text{س} = ٤$

$\boxed{\text{س} = ١}$

+ + + + + + - - - - - - - -
١

١٩) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه طول أ ب ثابت ويساوي س ، رُسم مستقيم من الرأس ب ليكون عمودي على الوتر أ جـ عند النقطة ء ، أثبت أن أكبر طول لمحيط المثلث أ ب ء يتحقق عندما تكون مساحة المثلث أ ب جـ هي $\frac{\text{س}^٢}{٢}$ سم^٢ :

الحل : ل = محيط المثلث أ ب ء



$\text{ل} = \text{س} + \text{ص} + \text{ف}$ ..... (١)

$\text{ف}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{س}^٢$ ..... (٢)

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ - \text{ص}^٢}$

$\text{ل} = \text{س} + \sqrt{\text{س}^٢ - \text{ص}^٢} + \text{ص}$ .... (*)

$\text{ل}' = ٠ + \frac{٠ - ٢\text{ص}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - \text{ص}^٢}} + ١ = ٠$ (س ثابت)

$١ = \frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{س}^٢ - \text{ص}^٢}} \longrightarrow \text{ص} = \sqrt{\text{س}^٢ - \text{ص}^٢}$

$\text{ص}^٢ = \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ \longrightarrow ٢\text{ص}^٢ = \text{س}^٢ \longrightarrow \text{ص} = \frac{\text{س}}{\sqrt{٢}}$

∴ الزاوية أ = ٤٥°

ل' + + + + + - - - - - -

$\frac{\text{س}}{\sqrt{٢}}$

٢٠) وجد تاجر أنه إذا كان سعر الوحدة من سلعة معينة ديناراً واحداً فإن بإمكانه بيع (٤٠٠) وحدة من هذه السلعة . ولكن هذا العدد ينقص بمعدل (٢٠) وحدة لكل زيادة قدرها (١٠) قروش في السعر، جد سعر الوحدة الذي يجعل قيمة المبيعات من هذه السلعة أكبر ما يمكن :

الحل : ١ + ٠,١٠ س

العدد = ٤٠٠ – ٢٠س

الإيراد = السعر × العدد

$\text{ل(س)} = (١ + ٠,١\text{س})(٤٠٠ - ٢٠\text{س})$

$= ٤٠٠ - ٢٠\text{س} + ٤٠\text{س} - ٢\text{س}^٢$

$\text{د(س)} = -٢\text{س}^٢ + ٢٠\text{س} + ٤٠٠$

$\text{د}'(\text{س}) = -٤\text{س} + ٢٠ = ٠$

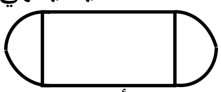
$-٤\text{س} = -٢٠ \longrightarrow \text{س} = ٥$

+ + + + + - - - - - - - - -
٥

السعر = ١ + ٠,١ × ٥

= ١ + ٠,٥ = ١,٥ دينار

٢١) يراد إقامة سياج حول قطعة أرض على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة كما في الشكل المجاور ، فإذا كانت تكلفة تركيب المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين (٤) دنانير ، وعلى الأجزاء المنحنية (٦) دنانير ، جد أكبر مساحة ممكنة لقطعة الأرض التي يمكن إحاطتها بسياج تبلغ تكلفته (٤٠٠) دينار :



الحل : م = ٢س ص + $\frac{١}{٢}$ π ص^{٢} + $\frac{١}{٢}$ π ص^{٢}

م = ٢س ص + π ص^{٢}

ت = ٨س + ٦π ص + ٦π ص

ت = ٨س + ١٢π ص

٤٠٠ = ٨س + ١٢π ص

١٠٠ = ٢س + ٣π ص

٢س = ١٠٠ - ٣π ص

س = $\frac{١٠٠ - ٣π ص}{٢}$

م = (١٠٠ - ٣π ص) ص + π ص^{٢}

م = ١٠٠ص - ٣π ص^{٢} + π ص^{٢}

م = ١٠٠ص - ٢π ص^{٢}

مَ = ١٠٠ - ٤π ص = ٠

٤π ص = ١٠٠

ص = $\frac{١٠٠}{٤π}$ = $\frac{٢٥}{π}$

+ + + + + | - - - - - - -

$\frac{٢٥}{π}$

٢٢) لدينا ٨٠٠م من الأسلاك نريد أن نسيج محيط المستطيل ثم نقسمه بواسطة الأسلاك إلى ثلاثة مستطيلات متساوية ، أوجد أبعاد أكبر مستطيل يمكننا الحصول عليه :

٤س + ٢ص = ٨٠٠

ص = ٤٠٠ – ٢س

الحل : أكبر مستطيل = س ص

م = س (٤٠٠ – ٢س)

م = ٤٠٠ - ٢س^{٢}

مَ = ٤٠٠ - ٤س = ٠

س = ١٠٠م

+ + + + + + | - - - - - - - -

١٠٠

ص = ٤٠٠ – ٢(١٠٠) = ٢٠٠م

٢٣) حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٤٠٠م^{٢} يراد إحاطتها بسور ارتفاعه ٤ متر ، إذا كانت الواجهة الأمامية للسور من الحجر الذي سعر المتر منه (٢٠) دينار ، والواجهات الثلاث الأخرى من الطوب (اللبن) منه (٥) دنانير أوجد بعدي الحديقة لتكون التكاليف أقل ما يمكن :

الحل : ٤٠٠ = س ص

ت = ٨٠س + ٤٠ص + ٢٠س

ت = ١٠٠س + ٤٠ ($\frac{٤٠٠٠}{س}$)

تَ = ١٠٠ - $\frac{١٦٠٠٠٠}{س^{٢}}$ = ٠

١٠٠س^{٢} = ١٦٠٠٠٠

س^{٢} = ١٦٠٠

س = ٤٠م

ص = $\frac{٤٠٠٠}{س}$

= $\frac{٤٠٠٠}{٤٠}$

ص = ١٠٠م

العوامل المساعدة في بناء سور الحديقة:
عامل ، سقالة ، مسطرين ، قده

تكلفة الحجر = ٢٠ × ٤ × س

تكلفة الطوب = ٥ ×٤×٢ص + ٥×٤×س

- - - - - - - - | + + + + + +

٤٠

٢٤) كرة مصمتة نصف قطرها ١٠سم ، حُفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ع سم

١) أثبت أن حجم متوازي المستطيلات يُعطى بالعلاقة

ح = ٢٠٠ع – $\frac{١}{٢}$ ع^{٣}

٢) جد أبعاد متوازي المستطيلات لتعطي أكبر حجم ممكن له

الحل : ح = س^{٢}ع

ح = (٢٠٠ – $\frac{١}{٢}$ ع^{٢}) ع

ح = ٢٠٠ ع – $\frac{١}{٢}$ ع^{٣}

حَ = ٢٠٠ – $\frac{٣}{٢}$ ع^{٢} = ٠

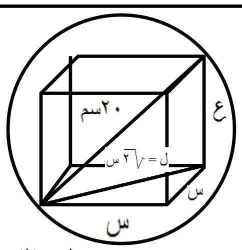
ع^{٢} = $\frac{٤٠٠}{٣}$ ، ع = $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

+ + + + + + | - - - - - - - -

$\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

س^{٢} = ٢٠٠ – $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤٠٠}{٣}$

س^{٢} = ٢٠٠ - $\frac{٢٠٠}{٣}$ = $\frac{٤٠٠}{٣}$ ⟵ س = $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$



جميع رؤوسه على الكرة

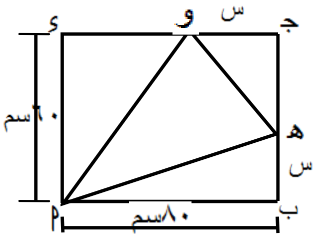
ل^{٢} = س^{٢} + س^{٢} = ٢س^{٢}

٤٠٠ = ل^{٢} + ع^{٢}

٤٠٠ – ع^{٢} = ٢س^{٢}

س^{٢} = ٢٠٠ – $\frac{١}{٢}$ ع^{٢}

٢٥) أراد أحد الأندية تصميم راية له مستطيلة الشكل صفراء اللون وبداخلها مثلث أحمر اللون بحيث يكون ب هـ = جـ و = س كما في الشكل التالي ، جد أقل مساحة ممكنة للمثلث :



الحل : م المستطيل ﻡ ب جـ ء = ٦٠

م △ جـ هـ و = ١/٢ × س × (٦٠ − س)

م △ هـ ب ﻡ = ١/٢ × ٨٠ × س

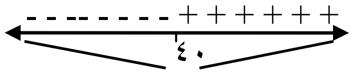
م △ ﻡ ء و = ١/٢ × (٨٠ − س) × ٦٠

∴ م△و هـ ﻡ = م المستطيل − (م△جـ هـ و + م△هـ ب ﻡ + م△ﻡ ء و)

م = ٦٠×٨٠ − ((٣٠س - س^2/٢) + (٤٠س) + (٢٤٠٠ − ٣٠س))

م = ٢٤٠٠ − ٤٠س + ١/٢ س^2 أقل ما يمكن

مَ = -٤٠ + س = ٠ ⟵ س = ٤٠



∴ م = ٢٤٠٠ − ١٦٠٠ + ١/٢ × ١٦٠٠ = ١٦٠٠سم^2

٢٦) ﻡ ب وتر في دائرة نصف قطرها ٢سم يزداد طوله بمعدل ١سم/ث ما معدل التغير في مساحة القطاع الذي يقع الوتر فيه في اللحظة التي تكون فيها زاوية القطاع ٦٠° :

الحل : ءس/ءن = ١سم / ث

ءم/ءن | = مطلوب

هـ = ٦٠°

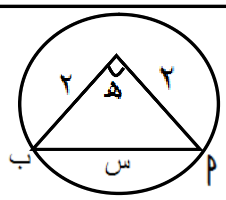
م = ١/٢ نق^2 × هـ

م = ١/٢ × ٤ × هـ

م = ٢هـ ⟵ مَ = ٢ ءهـ/ءن

= ٢ × ١/√٣

= √٣/٢ سم^2/ث



س = √(٤ + ٤ - ٢×٢×٢×جتاهـ)

س = √(٨- ٨جتاهـ)

ءس/ءن = (٨ جاهـ ءهـ/ءن) / (٢ × √(٨- ٨جتاهـ))

١ = (٤ √٣/٢ ءهـ/ءن) / ٤

١ = √٣ ءهـ/ءن ⟵ ءهـ/ءن = ١/√٣

٢٧) في الشكل المجاور ﻡب قطر في دائرة طوله ٢٠سم تتحرك النقطة جـ على القوس ﻡب بحيث يزيد قياس الزاوية جـ ب ﻡ بمعدل ٣°/دقيقة ، احسب معدل تغير مساحة المثلث ﻡ ب جـ عندما يكون قياس الزاوية جـ ب ﻡ = π/٣ :

الحل : ءهـ/ءن = ٣ × π/١٨٠ = π/٦٠ راد/ث

ءم/ءن | = مطلوب

هـ = π/٣

م = ١/٢ × ٢٠ × س × جاهـ

م = ١٠س جاهـ

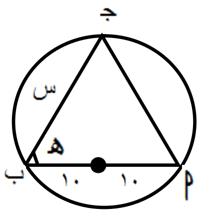
م = ١٠ × ٢٠جتاهـ جاهـ

م = ١٠٠ × ٢جاهـ جتاهـ

م = ١٠٠ جا٢هـ

ءم/ءن = ٢٠٠ جتا ٢هـ × ءهـ/ءن = ٢٠٠ × -١/٢ × π/٦٠

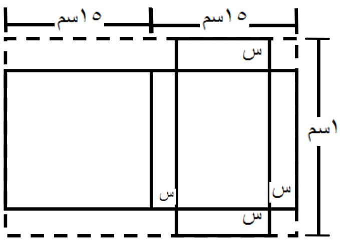
= -٥π/٣ سم^2/ د



جتاهـ = س/٢٠

س = ٢٠جتاهـ

٢٨) يمثل الشكل شبكة لصندوق على شكل متوازي مستطيلات مغلق تم قصها من قطعة ورق مقوى مستطيلة الشكل أبعادها ١٦سم ، ٣٠سم جد أكبر حجم ممكن للصندوق :



الحل : ح = (١٥ − س)(١٦ − ٢س)(س)

ح = (١٥س − س^2)(١٥ − ٢س)

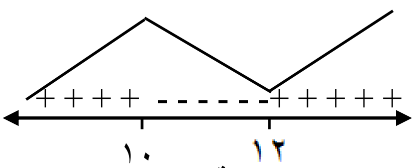
حَ = (١٥س − س^2)(-٢) + (١٦ − ٢س)(١٥ − ٢س) = ٠

= ٦س^2 - ٩٢س + ٢٤٠ = ٠

= ٣س^2 - ٤٦س + ١٢٠ = ٠

(٣س − ١٠)(س − ١٢) = ٠

س = ١٠/٣ ، س = ١٢



س = ١٠/٣

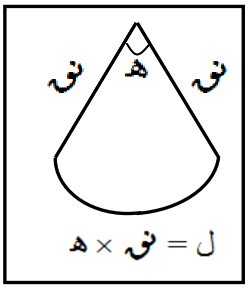
ح = ٩٨٠٠/٢٧

٢٩) قطاع دائري محيطة ٢٠م جد نصف قطر دائرتة بحيث يكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن :

الحل : نق + نق + نق × هـ = ٢٠

٢نق + نق × هـ = ٢٠

$\text{هـ} = \frac{\text{٢٠ - ٢نق}}{\text{نق}}$



$\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{نق}^{2} \times \text{هـ}$

$\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{نق}^{2} \times \frac{\text{٢٠ - ٢نق}}{\text{نق}}$

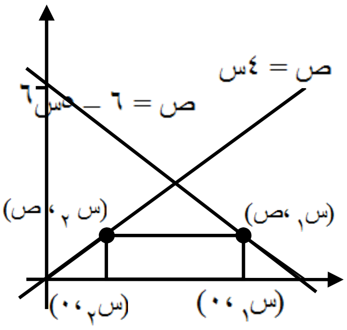
م = ١٠نق – نق^{2}

مَ = ١٠ – ٢نق = ٠ ← نق = ٥م

++++++ -------

٥

٣٠) يقع رأسان من رؤوس مستطيل على الجزء الموجب من محور السينات وتقع الرأسان الآخران على مستقيمين ص = ٤س ، ص = ٦ – ٥س فما أكبر مساحة ممكنه لهذا المستطيل اعتماداً على الشكل :



الحل :

ص = ص

٤س$_2$ = ٦ – ٥س$_1$

$\text{س}_1 = \frac{\text{٦ - ٤س}_2}{5}$

م = (س$_1$ - س$_2$) (ص)

$\text{م} = \left(\frac{\text{٦ - ٤س}_2}{5} - \text{س}_2\right)(\text{٤ س}_2)$

$\text{م} = \left(\frac{\text{٦ - ٩س}_2}{5}\right)(\text{٤س}_2)$

$\text{م} = \frac{1}{5}(\text{٢٤س}_2 \text{ - ٣٦ س}_2)$

$\text{مَ} = \frac{1}{5}(\text{٢٤ - ٧٢ س}_2) = 0$

++++++ ---------

$\frac{1}{3}$

$\text{م} = \frac{1}{5}\left(24 \times \frac{1}{3} - 36\ \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{5}$