أولاً : معدل التغير

التغير في السينات : $\Delta \text{س} = \text{س}_٢ - \text{س}_١ = \text{هـ}$

التغير في الاقتران : (التغير في الصادات)

$$\Delta \text{ص} = \text{ص}_٢ - \text{ص}_١ = \text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)$$

$$= \text{ق}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)$$

معدل التغير في ص :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$$

---

(١) إذا كان ص = ق(س) = $\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١$ ، جد مقدار التغير في الاقتران ق(س) في الحالات الآتية :

١) إذا تغيرت س من ١ إلى ٣

٢) إذا تغيرت س من $\text{س}_١ = \text{ن}$ إلى $\text{س}_٢ = \text{ن} - ١$

الحل :

① $\Delta \text{ص} = \text{ق}(٣) - \text{ق}(١)$

$= (٩ - ١٢ + ١) - (١ - ٤ + ١)$

$= -٢ - -٢ = ٠$

---

② $\Delta \text{ص} = \text{ق}(\text{ن} - ١) - \text{ق}(\text{ن})$

$= ((\text{ن} - ١)^٢ - ٤(\text{ن} - ١) + ١) - (\text{ن}^٢ - ٤\text{ن} + ١)$

$= (\text{ن}^٢ - ٢\text{ن} + ١ - ٤\text{ن} + ٤ + ١) - \text{ن}^٢ + ٤\text{ن} - ١$

$= \text{ن}^٢ - ٦\text{ن} + ٦ - \text{ن}^٢ + ٤\text{ن} - ١ = -٢\text{ن} + ٥$

---

(٢) إذا كان ق(س) = $\text{س}^٣ - \text{س}$ ، جد معدل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من (-١) إلى (٢) :

الحل :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١)}{٢ - -١} = \frac{٦ - ٠}{٣} = ٢$$

---

(٣) إذا كان ص = ق(س) = $٥ - \text{س}^٢$ ، جد معدل التغير في الاقتران ق(س) إذا تغيرت س من (٢) إلى (٢,١) :

الحل : $$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٢,١) - \text{ق}(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{٠,٥٩ - ١}{٠,١} = \frac{-٠,٤١}{٠,١} = -٤,١$$

---

(٤) إذا كان ق(س) = $|٢\text{س} - ٦|$ ، جد معدل التغير في الاقتران ق(س) على [١ ، ٤] :

الحل : $$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٤ - ١} = \frac{٢ - ٤}{٣} = \frac{-٢}{٣}$$

---

(٥) إذا كان ق(س) = $[\frac{١}{٢}\text{س} - ١]$ ؛ جد معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [٣ ، ٥] :

الحل : $$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٣)}{٥ - ٣} = \frac{١ - ٠}{٢} = \frac{١}{٢}$$

---

(٦) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{\text{س}^٢} & ، ١ \le \text{س} < ٢ \\ [\frac{\text{س}}{٢}] & ، ٢ \le \text{س} \le ٧ \end{cases}$$

جد :

أ) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ على [١ ، ٣]

ب) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ عند $\text{س}_١ = ٣$ ، هـ = ٤

الحل :

(٧) إذا كان ق(س) = س^{٢}+ ١ ، وكان معدل تغير الاقتران ق(س) يساوي (٣) على [٣، أ] جد أ :

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(أ)}{٣ - أ}$

$٣ = \frac{١٠ - أ^{٢} - ١}{٣ - أ}$

$٩ - ٣أ = ٩ - أ^{٢} \longrightarrow أ^{٢} - ٣أ = ٠$

$أ(أ - ٣) = ٠ \longrightarrow \boxed{أ = ٠}$ ، $\cancel{أ = ٣}$ تهمل

(٨) إذا كان ق(س) = أس^{٢}- ٣س + ٤ ، وكان معدل تغير ق(س) على [١ ، ٣] يساوي (٣) جد الثابت (أ) :

الحل :

<u>هام جداً :</u>

هنالك أسماء أخرى لمعدل التغير هي :

* السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

* ميل القاطع الواصل بين نقطتين .

(٩) جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٢ ، ق(٢)) (٥ ، ق(٥)) الواقعتين على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٣س :

الحل :

ميل القاطع = معدل تغير ق(س) على [٢ ، ٥]

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{١٠ - (-٢)}{٣} = ٤$

(١٠) إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، جد معدل تغير الاقتران ق على [١ ، ٣] :

الحل :

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = معدل التغير = ميل القاطع

= ظا (١٣٥°) = -١

(١١) إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٢ ، ٤) الواقعتين على منحنى الاقتران ق يصنع زاوية مقدارها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، جد ق(١) :

الحل :

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٤ - ق(١)}{٢ - ١} = ظا\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)$

$\frac{٤ - ق(١)}{١} = -١ \longrightarrow ٤ - ق(١) = -١$

$- ق(١) = -٥ \longrightarrow \boxed{ق(١) = ٥}$

(١٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٢}- ن ، حيث (ن) الزمن بالثواني ف(ن) المسافة بالأمتار ، أجب عن السؤالين الآتيين :

١) هل سرعة الجسيم ثابتة أم متغيرة ؟
٢) أحسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] :

الحل : ١ المسافة المقطوعة بين ن = ١ ، ن = ٢ هي :
ف(٢) – ف(١) = ٢ – ٠ = ٢

المسافة المقطوعة بين ن = ٢ ، ن = ٣ هي :
ف(٣) – ف(٢) = ٦ – ٢ = ٤

السرعة متغيرة ، لأن المسافة في الفترة [١ ، ٢] تختلف عنها في الفترة [٢ ، ٣] .

---

٢ $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{٢٠ - ٢}{٣} = \frac{١٨}{٣} = ٦$ م/ ث

(١٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٣ن^{٢} - ٤ن + ٢٠ ، حيث ف بعد الجسيم بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) ، ن الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١ ، ٤] :

الحل : $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{(٤٨ - ١٦ + ٢٠) - (٣ - ٤ + ٢٠)}{٣}$

$= \frac{٥٢ - ١٩}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$ م/ ث

دردشة خفيفة :

* مساحة المربع = (الضلع)^{٢} ⟵ ق(س) = س^{٢}

* حجم المكعب = (الضلع)^{٣} ⟵ ق(س) = س^{٣}

* مساحة الدائرة = π نق^{٢} ⟵ ق(س) = πس^{٢}

* مساحة مثلث متساوي الأضلاع ⟵ ق(س) = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢}

(١٤) أوجد معدل تغير في حجم المكعب إذا تغير طول ضلعه من ١ سم إلى ٣ سم :

الحل : ق(س) = س^{٣}

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{٢٧ - ١}{٢} = \frac{٢٦}{٢} = ١٣$

(١٥) إذا تغير طول ضلع صفيحة مربعة الشكل من ١ سم إلى ١,٢ سم جد :

١) التغير في مساحة الصفيحة
٢) معدل التغير في مساحة الصفيحة

الحل : ق(س) = س^{٢}

١) Δ ص = ق(١,٢) - ق(١) = ١,٤٤ - ١ = ٠,٤٤

٢) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٠,٤٤}{٠,٢} = \frac{٤٤}{٢٠} = ٢,٢$

(١٦) عند رمي حجر في بركة ماء راكدة تتكون دائرة يزداد طول قطرها بمرور الزمن ، ما معدل الزيادة في مساحة الدائرة عندما يزداد طول قطرها من ٨ سم إلى ١٠ سم :

الحل :

(١٧) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٦] يساوي ١٢ ، وكان هـ (س) = ٢س - ٣ ق(س) ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [١ ، ٦] :

الحل : $\frac{ق(٦) - ق(١)}{٦ - ١} = ١٢$

$\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(٦) - هـ(١)}{٦ - ١}$

$= \frac{(٢\times٦ - ٣ق(٦)) - (٢\times١ - ٣ق(١))}{٥}$

$= \frac{١٢ - ٣ق(٦) - ٢ + ٣ق(١)}{٥}$

$= \frac{١٢ - ٢}{٥} - ٣(\frac{ق(٦) - ق(١)}{٥})$

$= \frac{١٠}{٥} - ٣ \times ١٢ = ٢ - ٣٦ = -٣٤$

(١٨) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [-١ ، ٢] يساوي ٥، فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = ٤س^{٢} - ٣ ق(س) على الفترة نفسها :

الحل : $\frac{ق(٢) - ق(-١)}{٢ - -١} = ٥$

$\frac{ق(٢) - ق(-١)}{٣} = ٥$

$\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٢ - -١}$

$= \frac{(١٦ - ٣ق(٢)) - (٤ - ٣ق(-١))}{٣}$

$= \frac{١٦ - ٤}{٣} - ٣(\frac{ق(٢) - ق(-١)}{٣})$

$= ٤ - ٣\times٥ = ٤ - ١٥ = -١١$

(١٩) إذا كان ل(س) = س ق(س) ، وكان معدل التغير ل(س) في [-٢، ٤] يساوي (١٢) ، ل(٤) = ٦ فما قيمة ق(-٢) :

الحل :

$$\frac{\text{ل}(٤)-\text{ل}(-٢)}{٤--٢}=١٢$$

$$\frac{٦--٢\,\text{ق}(-٢)}{٦}=١٢$$

$$٦+٢\,\text{ق}(-٢)=٧٢$$

$$=\frac{٢}{٢}\,\text{ق}(-٢)=\frac{٦٦}{٢}\longrightarrow \boxed{\text{ق}(-٢)=٣٣}$$

(٢٠) إذا كان معدل التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١، ٣] يساوي ٥ وكان ق(١) × ق(٣) = ١٢ وكان $\text{هـ}(\text{س})=\frac{١}{\text{ق}(\text{س})}$ ، جد قيمة معدل التغير للاقتران هـ (س) على نفس الفترة :

الحل :

$$\frac{\text{ق}(٣)-\text{ق}(١)}{٣-١}=٥\longrightarrow \text{ق}(٣)-\text{ق}(١)=١٠$$

$$\longrightarrow \text{ق}(٣)\times\text{ق}(١)=١٢$$

$$\frac{\Delta\,\text{هـ}(\text{س})}{\Delta\,\text{س}}=\frac{\text{هـ}(٣)-\text{هـ}(١)}{٣-١}$$

$$=\frac{\frac{١}{\text{ق}(٣)}-\frac{١}{\text{ق}(١)}}{٢}$$

$$=\frac{\text{ق}(١)-\text{ق}(٣)}{(\text{ق}(٣))\,(\text{ق}(١))\,(٢)}=\frac{-١٠}{١٢\times٢}=\frac{-٥}{١٢}$$

(٢١) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [١ ، ٤] يساوي ٣، وكان ق(١) + ق(٤) = ٢، فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = $\text{ق}^{٢}$(س) على الفترة [١ ، ٤] :

الحل :

$$\frac{\text{ق}(٤)-\text{ق}(١)}{٤-١}=٣$$

ق(٤) - ق(١) = ٩ .... ①

ق(٤) + ق(١) = ٢ .... ②

$$①+② \Longleftarrow ٢\,\text{ق}(٤)=١١\longrightarrow \boxed{\text{ق}(٤)=\frac{١١}{٢}}$$

$$\text{ق}(١)+\frac{١١}{٢}=٢\longrightarrow \text{ق}(١)=٢-\frac{١١}{٢}$$

$$\boxed{\text{ق}(١)=\frac{-٧}{٢}}$$

تابع سؤال (٢١) :

$$\frac{\Delta\,\text{هـ}(\text{س})}{\Delta\,\text{س}}=\frac{\text{هـ}(٤)-\text{هـ}(١)}{٤-١}$$

$$=\frac{\text{ق}^{٢}(٤)-\text{ق}^{٢}(١)}{٣}=\frac{\frac{١٢١}{٤}-\frac{٤٩}{٤}}{٣}$$

$$=\frac{٧٢}{١٢}=٦$$

(٢٢) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢، ٥] يساوي ٧، وكان معدل تغيره على الفترة [٥، ٩] يساوي ١٤ ، فجد معدل التغير في الاقتران على الفترة [٢، ٩] :

الحل :

$$\frac{\text{ق}(٥)-\text{ق}(٢)}{٥-٢}=٧\longrightarrow \text{ق}(٥)-\text{ق}(٢)=٢١ \;--①$$

$$\frac{\text{ق}(٩)-\text{ق}(٥)}{٩-٥}=١٤\longrightarrow \text{ق}(٩)-\text{ق}(٥)=٥٦ \;--②$$

$$①+② \Longleftarrow \text{ق}(٩)-\text{ق}(٢)=٧٧$$

$$\left.\frac{\Delta\,\text{ق}}{\Delta\,\text{س}}\right|_{[٢،٩]}=\frac{\text{ق}(٩)-\text{ق}(٢)}{٩-٢}=\frac{٧٧}{٧}=١١$$

(٢٣) قذف جسم رأسياً للأعلى بحيث يكون بعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بعد (ن) ثانية معطى بالعلاقة
ف(ن) = ٦٠ن - ٥$\text{ن}^{٢}$ ، جد :

١) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] :

٢) السرعة المتوسطة للجسم بدلالة Δ ن ، إذا تغيرت ن من صفر إلى Δ ن :

الحل :

$$① \;\bar{\text{ع}}=\frac{\Delta\,\text{ف}}{\Delta\,\text{ن}}=\frac{\text{ف}(٥)-\text{ف}(٢)}{٥-٢}$$

$$=\frac{(٣٠٠-١٢٥)-(١٢٠-٢٠)}{٣}$$

$$=\frac{١٧٥-١٠٠}{٣}=\frac{٧٥}{٣}=٢٥\ \text{م/ث}$$

$$② \;\bar{\text{ع}}=\frac{\text{ف}(\Delta\,\text{ن})-\text{ف}(٠)}{\Delta\,\text{ن}}$$

$$=\frac{٦٠(\Delta\,\text{ن})-٥(\Delta\,\text{ن})^{٢}-٠}{\Delta\,\text{ن}}$$

$$=\frac{(\Delta\,\text{ن})\,(٦٠-٥(\Delta\,\text{ن}))}{\Delta\,\text{ن}}=٦٠-٥\,(\Delta\,\text{ن})$$

(٢٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + \text{س})^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى $\text{س}_{٢}$ يساوي $\left(\frac{-١}{٣}\right)$ ، فجد قيمة $\text{س}_{٢}$ حيث $\text{س}_{٢} > ٠$:

الحل : $\Delta\,\text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(١)$

$$\frac{-١}{٣} = \frac{١}{\text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢}} - \frac{١}{٢}$$

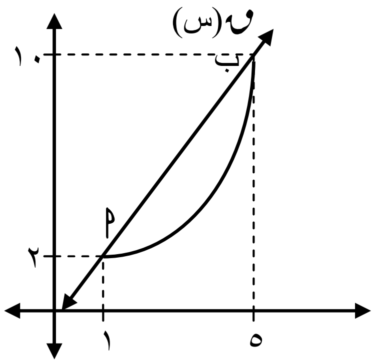
$$\frac{-١}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{\text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢}}$$

$$\frac{١}{٦} = \frac{١}{\text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢}} \longleftarrow \text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢} - ٦ = ٠$$

$$(\text{س}_{٢} + ٣)(\text{س}_{٢} - ٢) = ٠$$

$$\cancel{\text{س}_{٢} = -٣} \text{ ، } \boxed{\text{س}_{٢} = ٢}$$

(٢٥) يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران ق على الفترة $[١ ، ٥]$ جد ميل العمودي على القاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$:



الحل :

$$\text{م} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta\,\text{س}} = \frac{١٠ - ٢}{٥ - ١} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

$$\text{ميل العمودي ل} = \frac{-١}{\text{م}} = \frac{-١}{٢}$$

ثانياً : المشتقة الأولى :

* رموز المشتقة الأولى للاقتران $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ هي

$$\text{ق}'(\text{س}) \text{ ، } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \text{ ، } \frac{\text{د ق}(\text{س})}{\text{د س}} \text{ ، } \underset{\Delta\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta\,\text{س}}$$

* يمكن اعتبار المشتقة الأولى بأنها معدل تغير ق(س) بالنسبة لـ (س) عندما $\text{س} = \text{س}_{١}$

تعريف المشتقة الأولى :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \text{ معدل التغير}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

(١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٥\,\text{س}^{٢} + ١$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهــا}} \frac{٥\text{ع}^{٢} + ١ - ٥\text{س}^{٢} - ١}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهــا}} \frac{٥(\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهــا}} \frac{٥(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= ١٠\,\text{س}$$

(٢) إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + \text{س}$، $\text{س} \in \text{ح}$، فجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٣} - ٣\text{ع}^{٢} + \text{ع} - \text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{ع} - \text{س}} - ٣ \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع} - \text{س})\,(\text{ع}^{٢} + \text{ع}\,\text{س} + \text{س}^{٢})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$-٣ \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع} - \text{س})\,(\text{ع} + \text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + ١ = ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١$$

(٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٨}$ ، فجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ع}}{\text{ع}^{٢} + ٨} - \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٨}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\,\text{س}^{٢} + ٨\text{ع} - \text{س}\,\text{ع}^{٢} - ٨\text{س}}{(\text{ع}^{٢} + ٨)\,(\text{س}^{٢} + ٨)\,(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\,\text{س}^{٢} - \text{س}\,\text{ع}^{٢}}{(\text{ع}^{٢} + ٨)\,(\text{س}^{٢} + ٨)\,(\text{ع} - \text{س})}$$

$$+ \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٨(\text{ع} - \text{س})}{(\text{ع}^{٢} + ٨)\,(\text{س}^{٢} + ٨)\,(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\,\text{س}\,(\text{س} - \text{ع})}{(\text{ع}^{٢} + ٨)\,(\text{س}^{٢} + ٨)\,(\text{ع} - \text{س})}$$

$$+ \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٨}{(\text{ع}^{٢} + ٨)\,(\text{س}^{٢} + ٨)}$$

$$= \frac{-\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢} + ٨)^{٢}} + \frac{٨}{(\text{س}^{٢} + ٨)^{٢}} = \frac{-\text{س}^{٢} + ٨}{(\text{س}^{٢} + ٨)^{٢}}$$

(٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}$ ، جد $\text{ق}'(-١)$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل :

(٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ١}$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة ثم أوجد $\text{ق}'(٣)$:

الحل : $$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ع} + ١} - \sqrt{\text{س} + ١}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع} + ١} + \sqrt{\text{س} + ١}}{\sqrt{\text{ع} + ١} + \sqrt{\text{س} + ١}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع} + ١) - (\text{س} + ١)}{(\text{ع} - \text{س})\,(٢\sqrt{\text{س} + ١})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع} + ١ - \text{س} - ١}{(\text{ع} - \text{س})\,(٢\sqrt{\text{س} + ١})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع} - \text{س}}{(\text{ع} - \text{س})\,(٢\sqrt{\text{س} + ١})} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س} + ١}}$$

$$\text{ق}'(٣) = \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٤}$$

(٦) إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ، أوجد ق̀(٨) باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $\text{ق}'(٨) = \lim_{\text{ع} \to ٨} \frac{\text{ق(ع) - ق(٨)}}{\text{ع} - ٨}$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{\text{ع}} - ٢}{\text{ع} - ٨} \times \frac{(\sqrt[٣]{\text{ع}})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{\text{ع}} + ٤}{(\sqrt[٣]{\text{ع}})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{\text{ع}} + ٤}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٨} \frac{\text{ع} - ٨}{(\text{ع} - ٨)(١٢)} = \frac{١}{١٢}$$

(٧) باستخدام تعريف المشتقة جد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٣}$ عند س = ٢ :

الحل :

(٨) استخدام تعريف المشتقة الأولى لإيجاد ق̀(س) للاقتران ق(س) = $\sqrt{٢\text{س} + ١}$ ، حيث س > $\frac{-١}{٢}$:

الحل :

(٩) استخدام تعريف المشتقة جد المشتقة الأولى لإيجاد ق̀(س) للاقتران ق(س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ ، حيث س ≠ ٠ :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع) - ق(س)}}{\text{ع - س}}$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\frac{١}{\text{ع}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}{\text{ع - س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{ع}^{٢}}{(\text{ع}^{٢})(\text{س}^{٢})(\text{ع - س})}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(\text{س - ع})(\text{س + ع})}{(\text{ع}^{٢})(\text{س}^{٢})(\text{ع - س})} = \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٤}}$$

* المشتقة من اليمين :

$$\text{ق}'_{+}(\text{أ}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{ق(أ + هـ) - ق(أ)}}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'_{+}(\text{أ}) = \lim_{\text{ع} \to \text{أ}^{+}} \frac{\text{ق(ع) - ق(أ)}}{\text{ع - أ}}$$

* المشتقة من اليسار :

$$\text{ق}'_{-}(\text{أ}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{\text{ق(أ + هـ) - ق(أ)}}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'_{-}(\text{أ}) = \lim_{\text{ع} \to \text{أ}^{-}} \frac{\text{ق(ع) - ق(أ)}}{\text{ع - أ}}$$

إذا كان $\text{ق}'_{+}(\text{أ}) = \text{ق}'_{-}(\text{أ})$ فإن $\text{ق}'(\text{أ})$: موجودة

إذا كان $\text{ق}'_{+}(\text{أ}) \neq \text{ق}'_{-}(\text{أ})$ فإن $\text{ق}'(\text{أ})$: غير موجودة

(١٠) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س} \leq ٣ \\ ٦\text{س} - ٩ & \text{، س} > ٣ \end{cases}$$

جد أ) $\text{قَ}(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

ب) $\text{قَ}(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل : أ) $\text{قَ}(١) = \underset{ع \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(١)}{ع - ١}$

$$= \underset{ع \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٦ع - ٩ + ٣}{ع - ١} = \underset{ع \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٦ع - ٦}{ع - ١}$$

$$= \underset{ع \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٦(ع - ١)}{ع - ١} = ٦$$

ب) $\text{قَ}(٣) \longrightarrow$ تحول $\longrightarrow$ نجد $\text{قَ}_{+}(٣)\text{،}\ \text{قَ}_{-}(٣)$

$$\text{قَ}_{+}(٣) = \underset{ع \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٣)}{ع - ٣}$$

$$= \underset{ع \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \frac{ع^{٢} - ٩}{ع - ٣} = ٦$$

$$\text{قَ}_{-}(٣) = \underset{ع \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٣)}{ع - ٣}$$

$$= \underset{ع \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٦ع - ٩ - ٩}{ع - ٣} = \underset{ع \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٦(ع - ٣)}{ع - ٣} = ٦$$

بما أن $\text{قَ}_{+}(٣) = \text{قَ}_{-}(٣) = ٦ \longrightarrow \therefore \text{قَ}(٣) = ٦$

أي أن الاقتران ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٣

(١١) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س} \neq ٣ \\ ٩ & \text{، س} = ٣ \end{cases}$$

باستخدام تعريف المشتقة جد $\text{قَ}(٣)$

الحل : $\text{قَ}(٣) = \underset{ع \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٣)}{ع - ٣}$

$$= \underset{ع \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ع^{٢} - ٩}{ع - ٣} = ٦$$

(١٢) $\text{ق}(\text{س}) = |٢\text{س}| + |\text{س} - ٢|$ ، جد $\text{قَ}(١)$ باستخدام التعريف :

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + -(\text{س} - ٢)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + ٢$ عند س = ١

$$\text{قَ}(١) = \underset{ع \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(١)}{ع - ١}$$

$$= \underset{ع \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ع + ٢ - ٣}{ع - ١} = \underset{ع \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ع - ١}{ع - ١} = ١$$

(١٣) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}| + |\text{س} - ٢|$ ، جد المشتقة الأولى باستخدام التعريف عند (٠ ، ٢) :

الحل : * نجد المشتقة عند س = ٠ (ألإحداثي السيني)

* نعيد تعريف لأن ناتج التعويض صفر

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ١ & \text{، س} > ٢ \\ ٢ & \text{، } ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٢ - ٢\text{س} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$$

$$\text{قَ}_{+}(٠) = \underset{ع \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٠)}{ع - ٠} = \underset{ع \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٢}{ع} = ٠$$

$$\text{قَ}_{-}(٠) = \underset{ع \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٠)}{ع - ٠}$$

$$= \underset{ع \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٢ع - ٢}{ع} = -٢$$

$\text{قَ}_{+}(٠) \neq \text{قَ}_{-}(٠) \longrightarrow \text{قَ}(٠)$: غير موجودة

(١٤) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^{٢}|\,[\,\text{س}\,]$ ، جد $\text{ق}'(٠)$ باستخدام التعريف :

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\,[\,\text{س}\,]$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س}^{٢} & ، \ -١ \le \text{س} < ٠ \\ ٠ & ، \ ٠ \le \text{س} \le ١ \end{cases}$$

$$\text{ق}'_{+}(٠) = \underset{\text{ع}\to ٠^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٠)}{\text{ع} - ٠} = \underset{\text{ع}\to ٠^{+}}{\text{نها}} \frac{٠ - ٠}{\text{ع}} = ٠$$

$$\text{ق}'_{-}(٠) = \underset{\text{ع}\to ٠^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٠)}{\text{ع} - ٠}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٠^{-}}{\text{نها}} \frac{-\text{ع}^{٢} - ٠}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to ٠^{-}}{\text{نها}} (-\text{ع}) = ٠$$

$\therefore \text{ق}'(٠) = ٠$: (موجودة)

* <u>أمثلة غريبة .. عجيبة :</u>

(١٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - \text{م})\,\text{ل}(\text{س})$ ، حيث $\text{ل}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = \text{م}$ ، بين باستخدام تعريف المشتقة أن $\text{ق}'(\text{م}) = \text{ل}(\text{م})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{م}) = \underset{\text{ع}\to \text{م}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{م})}{\text{ع} - \text{م}}$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{م}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} - \text{م})\,\text{ل}(\text{ع}) - (\text{م} - \text{م})\,\text{ل}(\text{م})}{\text{ع} - \text{م}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{م}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} - \text{م})\,\text{ل}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{م}} = \underset{\text{ع}\to \text{م}}{\text{نها}}\, \text{ل}(\text{ع})$$

* لكن ل متصل $\longleftarrow$ $\therefore \underset{\text{ع}\to \text{م}}{\text{نها}}\, \text{ل}(\text{ع}) = \text{ل}(\text{م})$

$\therefore \text{ق}'(\text{م}) = \text{ل}(\text{م})$

(١٦) أثبت أن $\underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$ يساوي $\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : * نضيف ونطرح $\text{س}\,\text{ق}(\text{س})$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + \text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س})\,(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}\,(\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{ع}))}{\text{ع} - \text{س}}$$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$

(١٧) إذا كان مقدار التغير في $\text{ق}(\text{س})$ يُعطى بالعلاقة $٣\text{هـ} + ٥\,\text{س}\,\text{هـ} + ٧\,\text{هـ}^{٢}$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\therefore$ معدل التغير $= \frac{\text{هـ}(٣ + ٥\text{س} + ٧\,\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$\therefore$ م التغير $= ٣ + ٥\,\text{س} + ٧\text{هـ}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}}$ معدل التغير

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} (٣ + ٥\text{س} + ٧\,\text{هـ}) = ٣ + ٥\,\text{س}$

(١٨) إذا كان مقدار التغير في الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ يساوي $\text{س}^{٢}\,\text{ع} - \text{ع}^{٢}\,\text{س}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل : $\Delta\,\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{ع} - \text{ع}^{٢}\,\text{س}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta\,\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}\,\text{ع} - \text{ع}^{٢}\,\text{س}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}\text{ع}\,(\text{س} - \text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} -\,\text{ع}\,\text{س} = -\,\text{س}^{٢}$$

(١٩) إذا كان معدل التغير للاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي (٦ س^{٢} هـ – ٣ س هـ^{٢}) ، حيث : هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر ، فجد ق$'$(-٢) :

الحل :

* قواعد الاشتقاق :

مشتقة الثابت = صفر

(١) إذا كان ق(س) = أ ⟵ ق$'$(س) = صفر

ق(س) = ٥ ⟵ ق$'$(س) = صفر

ق(س) = $\frac{١}{٢}$ ⟵ ق$'$(س) = صفر

ق(س) = - $\sqrt{٣}$ ⟵ ق$'$(س) = صفر

ق(س) = π ⟵ ق$'$(س) = صفر

مشتقة س = ١

(٢) إذا كان ق(س) = س ⟵ ق$'$(س) = ١

ق(ص) = ص ⟵ ق$'$(ص) = ١

ق(ع) = ع ⟵ ق$'$(ع) = ١

مشتقة الثابت أس = أ

(٣) إذا كان ق(س) = أ س ⟵ ق$'$(س) = أ

ق(س) = ٥ س ⟵ ق$'$(س) = ٥

ق(س) = $\frac{-١}{٢}$ س ⟵ ق$'$(س) = $\frac{-١}{٢}$

ق(س) = $\sqrt{٢}$ س ⟵ ق$'$(س) = $\sqrt{٢}$

ق(س) = π س ⟵ ق$'$(س) = π

مشتقة س^{ن} = ن س$^{ن-١}$

(٤) إذا كان ق(س) = س^{ن} ⟵ ق$'$(س) = ن س$^{ن-١}$

ق(س) = س^{٧} ⟵ ق$'$(س) = ٧ س$^{٧-١}$ = ٧ س^{٦}

ق(س) = س^{٨} ⟵ ق$'$(س) = ٨ س^{٧}

ق(س) = س^{٢} ⟵ ق$'$(س) = ٢س

مشتقة أ س^{ن} = أ × ن س$^{ن-١}$

(٥) إذا كان ق(س) = أ س^{ن} ⟵ ق$'$(س) = أ ن س$^{ن-١}$

ق(س) = ٧س^{٦} ⟵ ق$'$(س) = ٤٢ س^{٥}

ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٣} ⟵ ق$'$(س) = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}

ق(س) = $\sqrt{٣}$ س^{١٠} ⟵ ق$'$(س) = $\sqrt{٣}$ × ١٠ س^{٩}

ق(س) = ٤ س^{٥} ⟵ ق$'$(س) = ٢٠س^{٤}

ق(س) = -٢س^{٥} ⟵ ق$'$(س) = -١٠ س^{٤}

مشتقة س$^{\frac{أ}{ب}}$ = $\frac{أ}{ب}$ س$^{\frac{أ}{ب}-١}$

(٦) ق(س) = س$^{\frac{٦}{٥}}$ ⟵ ق$'$(س) = $\frac{٦}{٥}$ س$^{\frac{٦}{٥}-١}$

ق$'$(س) = $\frac{٦}{٥}$ س$^{\frac{٦-٥}{٥}}$ ⟵ ق$'$(س) = $\frac{٦}{٥}$ س$^{\frac{١}{٥}}$

(٧) ق(س) = س$^{\frac{٧}{٢}}$ ⟵ ق$'$(س) = $\frac{٧}{٢}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$

(٨) ق(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ ⟵ ق$'$(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{١-٣}{٣}}$

ق$'$(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ ⟵ ق$'$(س) = $\frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}}$

مشتقة جـ س$^{\frac{أ}{ب}}$ = جـ × $\frac{أ}{ب}$ س$^{\frac{أ}{ب}-١}$

(٩) إذا كان ق(س) = ٥ س$^{\frac{٧}{٢}}$ ، جد ق$'$(س) :

ق$'$(س) = ٥ × $\frac{٧}{٢}$ س$^{\frac{٧-٢}{٢}}$ = $\frac{٣٥}{٢}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$

(١٠) $ق(س) = \frac{٤}{٩} س^{\frac{١}{٣}} \longrightarrow ق'(س) = \frac{٤}{٩} \times \frac{١}{٣} س^{\frac{١-٣}{٣}}$

$ق'(س) = \frac{٤}{٢٧} س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{٤}{٢٧ س^{\frac{٢}{٣}}}$

(١١) $ق(س) = \sqrt{٢}\, س^{\frac{٣}{٢}} \longrightarrow ق'(س) = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢} \sqrt{س}$

مشتقة $س^{-م} = -م\, س^{-م-١}$

(١٢) $ق(س) = س^{-٤} \longrightarrow ق'(س) = -٤ س^{-٤-١} = -٤س^{-٥}$

(١٣) $ق(س) = \frac{١}{س^{٩}} \longrightarrow ق'(س) = س^{-٩}$

$ق'(س) = -٩س^{-١٠} = \frac{-٩}{س^{١٠}}$

(١٤) $ق(س) = س^{-٦} \longrightarrow ق'(س) = -٦ س^{-٧}$

$ق'(س) = \frac{-٦}{س^{٧}}$

مشتقة $س^{-\frac{م}{ب}} = \frac{-م}{ب} س^{-\frac{م}{ب}-١}$

(١٥) $ق(س) = س^{-\frac{٣}{٥}} \longrightarrow ق'(س) = \frac{-٣}{٥} س^{-\frac{٣}{٥}-١}$

$ق'(س) = \frac{-٣}{٥} س^{-\frac{٨}{٥}} = \frac{-٣}{٥ س^{\frac{٨}{٥}}}$

(١٦) $ق(س) = س^{-\frac{١}{٣}} \longrightarrow ق'(س) = \frac{-١}{٣} س^{-\frac{١}{٣}-١}$

$ق'(س) = \frac{-١}{٣} س^{-\frac{٤}{٣}} = \frac{-١}{٣ س^{\frac{٤}{٣}}}$

(١٧) $ق(س) = \frac{٢}{س^{٦}} \longrightarrow ق'(س) = ٢ س^{-٦}$

$ق'(س) = -١٢ س^{-٧} = \frac{-١٢}{س^{٧}}$

مشتقة جمع الاقترانات

* إذا كان $ق(س) = هـ(س) + ل(س) + م(س)$

فإن $ق'(س) = هـ'(س) + ل'(س) + م'(س)$

(١٨) $ق(س) = س^{٢} + س^{٣} + ٧س^{٤} + ٤$

$ق'(س) = ٢س + ٣س^{٢} + ٢٨س^{٣}$

(١٩) $ق(س) = ٧س + \frac{١}{٢} س^{٦} + ٣س^{٧} + ٩$

$ق'(س) = ٧ + ٣س^{٥} + ٢١س^{٦}$

(٢٠) $ق(س) = ٧س^{٣} + س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٤}} + ٢س - ١$

$ق'(س) = ٢١س^{٢} + \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٤} س^{-\frac{٣}{٤}} + ٢$

مشتقة طرح الاقترانات

* إذا كان $ق(س) = هـ(س) - ل(س) - م(س)$

فإن $ق'(س) = هـ'(س) - ل'(س) - م'(س)$

(٢١) $ق(س) = س^{٧} - ٤س^{٦} - ٣س - ٦$

$ق'(س) = ٧س^{٦} - ٢٤س^{٥} - ٣$

(٢٢) $ق(س) = -٥س - ٧س^{٢} - ٣س^{٣} - ٦$

$ق'(س) = -٥ - ١٤س - ٩س^{٢}$

(٢٣) $ق(س) = ٣س^{٣} - ٢س^{-١} - ٦س - \frac{٧}{٢}$

$ق'(س) = ٩س^{٢} + ٢س^{-٢} - ٦$

مشتقة جمع وطرح الاقترانات

(٢٤) $ق(س) = ٧س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣س - ٨$

$ق'(س) = ٢١س^{٢} - ٨س + ٣$

(٢٥) ق(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ + س$^{\frac{١}{٤}}$ - س$^{\frac{١}{٥}}$ + ٧

قَ(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ + $\frac{١}{٤}$ س$^{\frac{-٣}{٤}}$ - $\frac{١}{٥}$ س$^{\frac{-٤}{٥}}$

قَ(س) = $\frac{١}{٣\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}$ + $\frac{١}{٤\text{س}^{\frac{٣}{٤}}}$ - $\frac{١}{٥\text{س}^{\frac{٤}{٥}}}$

---

(٢٦) ق(س) = ٧س$^{\frac{١}{٣}}$ + ٥س$^{\frac{١}{٧}}$ - ٣س + ٩

قَ(س) = $\frac{٧}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ + $\frac{٥}{٧}$ س$^{\frac{-٦}{٧}}$ - ٣

قَ(س) = $\frac{٧}{٣\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}$ + $\frac{٥}{٧\text{س}^{\frac{٦}{٧}}}$ - ٣

---

(٢٧) ق(س) = س^{٥}- س^{٢} + ٢س

قَ(س) = ٥س^{٤} - ٢س + ٢

<u>مشتقة ضرب اقترانين</u>

* إذا كان ل(س) = ق(س) × هـ(س)

فإن لَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

= الأول يبقى ونشتق الثاني + الثاني يبقى ونشتق الأول

---

(٢٨) ق(س) = (س^{٢} + ١) (٥س + ٢)

قَ(س) = (س^{٢} + ١) (٥) + (٥س + ٢) (٢س)

---

(٢٩) ق(س) = (س^{٣}+ ٣س + ١) (٥س^{٢} + ٢)

قَ(س) = (س^{٣}+ ٣س + ١)(١٠س) + (٥س^{٢} + ٢)(٣س^{٢} + ٣)

---

(٣٠) إذا كان ق(س) = ٥ هـ(س) × ٣س^{٢}، وكان هـَ(١) = ٥

، هـ(١) = ١٠ ، فإن قَ(١) = ؟؟

أ) ١٠٠ ب) ١٢٥ ج) ٣٧٥ ى) ٢٠٠

الحل :

---

(٣١) إذا كان ق(س) = س^{٢}× هـ(س) ، وعلمت أن هـَ(٣) = ٥

، هـ(٣) = ٤ ، فإن قَ(٣) = ؟؟

أ) ٦٠ ب) ٦٣ ج) ٦٦ ى) ٦٩

الحل : قَ(س) = س^{٢}× هـَ(س) + هـ(س) × ٢س

قَ(٣) = (٣)^{٢}× هـَ(٣) + هـ(٣) × (٢) (٣)

= ٩×٥ + ٤×٦ = ٤٥ + ٢٤ = ٦٩

---

(٣٢) إذا كان ق(س) = ٥س× هـ(س) ، وكان هـ(٣) = ٣

، هـَ(٣) = ٤ ، أوجد قَ(٣) = ؟؟

أ) ٧٥ ب) -٧٥ ج) ٣٠ ى) -٣٠

الحل : قَ(س) = ٥س × هـَ(س) + هـ(س) × ٥

قَ(٣) = ١٥×٤ + ٣×٥ = ٦٠ + ١٥ = ٧٥

---

(٣٣) إذا كان ق(س) = س (س^{٢}+ ٥) ، فإن قَ(س) =؟؟

أ) -٣س^{٢}+ ٢ ب) ٣س^{٢}+ ٥

ج) ٢س + ٥ ى) ٢س^{٢}

الحل :

---

(٣٤) إذا كان ل(١) = ٢ ، فإن لَ(١) = ٤ ، هـ(١) = ١

، هـَ(١) = ٥ ، وكان ق(س) = هـ(س) × ل(س)

، فإن قَ(١) = ؟؟

أ) -٦ ب) ٦ ج) -١٤ ى) ١٤

الحل :

(٣٥) إذا كان ق(س) = هـ(س) × ل(س) ، وكان ل(١) = ٢ ،
فإن ل َ(١) = ٣ ، هـَ(١) = ٣ ، ق(١) = ٦ ، فجد قَ(١) = ؟؟

أ) -١٥ ب) ١٥ ج) -٢٤ د) ٢٤

الحل :

مشتقة ضرب ٣ اقترانات

* إذا كان ل(س) = ق(س) × هـ(س) × م(س)

فإن ل َ(س) = قَ × هـ × م + ق × هـَ × م + ق × هـ × مَ

(٣٦) $ق(س) = (س^{٣} + ١)(س^{٢} + ٣)(١ - ٥س)$

$ق'(س) = (٣س^{٢})(س^{٢} + ٣)(١ - ٥س)$

$+ (س^{٣} + ١)(٢س)(١ - ٥س)$

$+ (س^{٣} + ١)(س^{٢} + ٣)(-٥)$

(٣٧) $ق(س) = (١ + س^{٢})(٥س + س^{٦})(٢س)$

$ق'(س) = (٢س)(٥س + س^{٦})(٢س)$

$+ (١ + س^{٢})(٥ + ٦س^{٥})(٢س)$

$+ (١ + س^{٢})(٥س + س^{٦})(٢)$

مشتقة القسمة

* إذا كان $ل(س) = \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

فإن $ل'(س) = \frac{هـ(س) \times ق'(س) - ق(س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

$ل'(س) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

(٣٨) $ق(س) = \frac{٧س^{٢} + ١}{٢س - ٥}$

$ق'(س) = \frac{(٢س - ٥)(١٤س) - (٧س^{٢} + ١)(٢)}{(٢س - ٥)^{٢}}$

(٣٩) $ق(س) = \frac{٥س^{٣} + ١}{س^{٢} + ١}$

$ق'(س) = \frac{(س^{٢} + ١)(١٥س^{٢}) - (٥س^{٣} + ١)(٢س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

(٤٠) إذا كان $ق(س) = \frac{١ + ٣س}{س^{٧} + ٢}$

$ق'(س) = \frac{(س^{٧} + ٢)(٣) - (١ + ٣س)(٧س^{٦})}{(س^{٧} + ٢)^{٢}}$

مشتقة قسمة $\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$

* إذا كان $ق(س) = \frac{هـ(س)}{أ}$ ، فإن $ق'(س) = \frac{هـ'(س)}{أ}$

(٤١) $ق(س) = \frac{س^{٢} + ٢}{٦} \longrightarrow ق'(س) = \frac{٢س}{٦}$

(٤٢) $ق(س) = \frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢س - ٤}{٩}$

$ق'(س) = \frac{٣س^{٢} + ٦س - ٢}{٩}$

(٤٣) $ق(س) = \frac{\sqrt{٢}\, س^{٣} + \sqrt{٥}\, س}{٦}$

$ق'(س) = \frac{٣\sqrt{٢}\, س^{٢} + \sqrt{٥}}{٦}$

(٤٤) $ق(س) = \frac{١ - ٤س}{٧} \longrightarrow ق'(س) = \frac{-٤}{٧}$

مشتقة قسمة $\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$

* إذا كان $ق(س) = \frac{أ}{هـ(س)}$ ، فإن $ق'(س) = \frac{-أ \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{-\text{ثابت} \times \text{مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^{٢}}$

(٤٥) إذا كان $ق(س) = \frac{٧}{س^{٣} + ٥}$ ، جد $ق'(س)$:

الحل : $ق'(س) = \frac{-٧ \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ٥)^{٢}} = \frac{-٢١س^{٢}}{(س^{٣} + ٥)^{٢}}$

(٤٦) إذا كان ق(س) = $\frac{-٣}{س^{٢} + ٦}$ ، جد قَ(س) :

الحل : قَ(س) = $\frac{-(-٣)\ (٢س)}{(س^{٢}+٦)^{٢}} = \frac{٦س}{(س^{٢}+٦)^{٢}}$

(٤٧) إذا كان ق(س) = $\frac{٢}{س^{\frac{١}{٢}} + ١}$ ، جد قَ(س) :

الحل : قَ(س) = $\frac{-٢\ (\frac{١}{٢}س^{\frac{-١}{٢}})}{(س^{\frac{١}{٢}} + ١)^{٢}} = \frac{-س^{\frac{-١}{٢}}}{(س^{\frac{١}{٢}} + ١)^{٢}}$

(٤٨) ق(س) = $\frac{١}{س}$ + س ، فإن قَ(٢) = ؟؟

أ) $\frac{-١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) $\frac{-٣}{٤}$ د) $\frac{٣}{٤}$

الحل :

(٤٩) إذا كان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{س + ١}$ ، س ≠ -١ ، وعلمت أن ق(٢) = ١ ، هـَ(٢) = ٧ ، فإن قَ(٢) = ؟؟

أ) ٢ ب) -٢ جـ) ١ د) -١

الحل :

(٥٠) إذا كان قَ(١) = ٣، قَ(١) = ٢ ، فإن $(\frac{٧}{ق})'$(١) تساوي :

أ) $\frac{-٢١}{٤}$ ب) $\frac{٢١}{٤}$ جـ) $\frac{٧}{٣}$ د) $\frac{-٧}{٣}$

الحل :

(٥١) إذا كان ق(س) = $\frac{س + ١}{هـ(س)}$ ، حيث هـ(س) ≠ صفر ، وعلمت أن هـ(٢) = ٥ ، هـَ(٢) = ١ ، فإن قَ(٢) = ؟؟

أ) $\frac{٢}{٥}$ ب) $\frac{١}{٥}$ جـ) $\frac{٢}{٢٥}$ د) $\frac{-٢}{٢٥}$

الحل :

(٥٢) إذا كان ق(س) = $\frac{أ}{٥س + ١}$ ، أوجد قيمة (أ) إذا كانت قَ(١) = ٥ :

أ) -٣٦ ب) ٣٦ جـ) -١٨ د) ١٨

الحل :

(٥٣) إذا كان ق(س) = $\frac{س + ٥}{٦ - ٢س}$ ، فإن قَ(٢) = ؟؟

أ) -٤ ب) ٤ جـ) - $\frac{١}{٢}$ د) ٣

الحل :

مشتقة هـ(س) = (ق(س))^{ن}

* إذا كان هـ (س) = (ق(س))^{ن}

فإن هـَ(س) = ن (ق(س))$^{ن-١}$ × قَ(س)

(٥٤) ق(س) = (س^{٣} + ٢)^{٩}

قَ(س) = ٩ (س^{٣} + ٢)^{٨} × (٣س^{٢})

(٥٥) $ق(س) = (١ - ٤س)^{١٠٠}$

$ق\,'(س) = ١٠٠\,(١ - ٤س)^{٩٩} \times -٤$

(٥٦) $ق(س) = (١ + س^{٣} + ٢س)^{١٣}$

$ق\,'(س) = ١٣\,(١ + س^{٣} + ٢س)^{١٢} \times (٣س^{٢} + ٢)$

مشتقة $هـ(س) = (ق(س))^{\frac{م}{ب}}$

* إذا كان $هـ(س) = (ق(س))^{\frac{م}{ب}}$

فإن $هـ\,'(س) = \frac{م}{ب}\,(ق(س))^{\frac{م}{ب}-١} \times ق\,'(س)$

(٥٧) إذا كان $ق(س) = (س^{٢} + ٣)^{\frac{١}{٧}}$ ، أوجد $ق\,'(س)$:

الحل :

(٥٨) إذا كان $ل(٢) = ١$ ، $ل\,'(٢) = ٥$ ، وكان

$ق(س) = (س^{٢}\,ل(س))^{٣}$ ، جد $ق\,'(٢)$:

أ) ٧٢ ب) ٢٤ جـ) ٢ د) ١١٥٢

الحل :

(٥٩) إذا كان $م(٣) = ٧$ ، $م\,'(٣) = ٤$ ، وكان

$ق(س) = (٢س^{٢} + م(س))^{٣}$ ، جد $م\,'(٣)$:

أ) -٣٠٠٠٠ ب) ٣٠٠٠٠

جـ) -٦٠٠٠٠ د) ٦٠٠٠٠

الحل :

مشتقة الجذور

* تذكير

$\sqrt[٥]{س^{٢} + ١}$ $\longrightarrow$	$(س^{٢} + ١)^{\frac{١}{٥}}$
$\sqrt[٧]{س^{٣} + ٥س + ٧}$ $\longrightarrow$	$(س^{٣} + ٥س + ٧)^{\frac{١}{٧}}$
$\sqrt[٣]{س^{٢} + ٥}$ $\longrightarrow$	$(س^{٢} + ٥)^{\frac{١}{٣}}$
$\sqrt[٤]{(٢س + ١)^{٣}}$ $\longrightarrow$	$(٢س + ١)^{\frac{٣}{٤}}$

* $هـ(س) = \sqrt[ن]{ق(س)}$ ، نحوله أولاً على شكل أس :

$هـ\,'(س) = \frac{١}{ن}\,(ق(س))^{\frac{١}{ن}-١} \times ق\,'(س)$

(٦٠) إذا كان $ق(س) = \sqrt[٧]{س^{٢} + ٣}$

$ق(س) = (س^{٢} + ٣)^{\frac{١}{٧}}$

$ق\,'(س) = \frac{١}{٧}\,(س^{٢} + ٣)^{\frac{-٦}{٧}} \times ٢س$

(٦١) إذا كان $ق(س) = \sqrt[٩]{٥س^{٢} + ٧}$ ، أوجد $ق\,'(س)$:

الحل :

<u>مشتقة الجذر التربيعي</u>

$$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{هـ}(\text{س})} \Rightarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر التربيعي}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$$

---

(٦٢) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٣}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١}}$$

---

(٦٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٨}$ ، أوجد $\text{ق}'(١)$:

الحل :

---

(٦٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{١٠\text{س} - \text{س}^{٢}}$ فإن $\text{ق}'(١) =$

ﺃ) $\frac{٥}{٣}$ ب) $\frac{-٧}{٣}$ جـ) $\frac{-٤}{٣}$ ء) $\frac{٤}{٣}$

الحل:

---

(٦٥) إذا علمت $\lim_{\text{ع} \to ٢} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢} =$

وكان ل (س) = ق (س) + س^{٢} فإن ل$'$(٢) تساوي . . .

ﺃ) ١٤ ب) ١٠ جـ) ٨ ء) صفر

الحل:

---

(٦٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢} + ١)(\text{س} + ٢)^{٣}}{(\text{س}^{٢} + ١)}$

فإن ق$'$(٢) = ؟؟

ﺃ) ٤٦ ب) ٤٨ جـ) ٥٠ ء) ٥٢

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\cancel{(\text{س}^{٢} + ١)}(\text{س} + ٢)^{٣}}{\cancel{(\text{س}^{٢} + ١)}} = (\text{س} + ٢)^{٣}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣(\text{س} + ٢)^{٢}$$

$$\Rightarrow \text{ق}'(٢) = ٣(٢ + ٢)^{٢} = ٣ \times ١٦ = ٤٨$$

---

(٦٧) إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٥ س + ٨ فإن ق$'$(٠) =

ﺃ) - ٥ ب) ٥ جـ) صفر ء) ١

الحل:

---

(٦٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤}}{٢} + \text{س}^{٣}$ جد ق$'$(س)

ﺃ) $\frac{-\text{س}^{٣}}{٢} - ٣\text{س}^{٢}$ ب) $\frac{\text{س}^{٣}}{٢} + ٣\text{س}^{٢}$

جـ) $-٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢}$ ء) $٢\text{س}^{٣} + ٣$

الحل:

---

(٦٩) إذا كان هـ (س) = س + ٥ فإن فإن هـ$'$(٥) =

ﺃ) ١ ب) صفر جـ) ٣ ء) ٢

---

(٧٠) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ فإن ق$'$(٢٥) = ؟؟

ﺃ) $\frac{١}{٥}$ ب) $\frac{-١}{٥}$ جـ) $\frac{١}{١٠}$ ء) $\frac{-١}{١٠}$

---

(٧١) إذا كان ق (س) = هـ (س) + ٥ س

وكان هـ$'$(٥) = ٢٥ فإن ق$'$(٥) = ؟؟

ﺃ) ٢٥ ب) ٣٠ جـ) - ٣٠ ء) - ٢٥

---

(٧٢) إذا كان ق (س) = س^{٢} هـ (س)

وكان هـ$'$(١) = ٥ ، هـ (١) = ٧ فإن ق$'$(١) = ؟؟

ﺃ) ١٥ ب) - ١٥ جـ) - ١٩ ء) ١٩

الحل:

(٧٣) إذا كان ق (س) = س^{٢} هـ (س)
وكان هـَ (٣) = ٥ ، هـ (٣) = ٤ فإن قَ (٣) = ؟؟

أ) صفر ب) ١٣٨ جـ) ٦٩ ء) - ٦٩

---

(٧٤) $\left(\frac{ق}{هـ} (١) \right)'$ تساوي :

أ) - ١ ب) ١ جـ) صفر ء) ٢

---

(٧٥) إذا كان هـ (س) اقتران كثير حدود وكان هـ (١) = ٥
هـَ (١) = - ١ فإن (هـ^{٢})َ (١) = ؟؟

أ) = - ١٠ ب) ١٠ جـ) صفر ء) - ٢

الحل:

---

(٧٦) إذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق
وكان لَ (- ٢) = ٤ ، هـَ (- ٢) = - ٣ ، فجد قَ (- ٢)
في كل مما يلي

أ) ق (س) = ٦ ل (س) – ٢ هـ (س)

ب) ق (س) = $\frac{١}{٢}$ ل (س) + هـ (س) + س^{٣}

الحل:

أ) قَ (س) = ٦ لَ (س) – ٢ هـَ (س)
قَ (- ٢) = ٦ × ٤ – ٢ × - ٣ = ٢٤ + ٦ = ٣٠

ب) قَ (س) = $\frac{١}{٢}$ لَ (س) + هـَ (س) + ٣ س^{٢}

قَ (- ٢) = $\frac{١}{٢}$ لَ (- ٢) + هـَ (- ٢) + ١٢

= ٢ – ٣ + ١٢ = ١١

---

٧٧) إذا علمت أن هـ(س) قابل للاشتقاق وأن هـ(٢) = ٣
هـَ(٢) = -١ ، فجد قَ(٢) في كل مما يأتي :

أ) ق(س) = س هـ(س)

ب) ق(س) = ٣ س^{٢} هـ(س) – ٥س

جـ) ق(س) = هـ(س) - $\frac{١}{هـ(س)}$

ء) ق(س) = $\frac{٢س + ١}{٣هـ(س)}$

الحل : أ) قَ(س) = س هـَ(س) + هـ(س) × ١

قَ(٢) = ٢ هـَ(٢) + هـ(٢)
= -٢ + ٣ = ١

ب) قَ(س) = ٣ س^{٢} هـَ(س) + هـ(س) × ٦س – ٥

قَ(٢) = (١٢ × -١) + (٣ × ١٢) – ٥
= -١٢ + ٣٦ – ٥ = ١٩

جـ) قَ(س) = هـَ(س) + $\frac{١ × هـَ(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

قَ(٢) = -١ + $\frac{-١}{٩}$ = $\frac{-١٠}{٩}$

ء) قَ(س) = $\frac{(٣ هـ(س)×٢) - ((٢س + ١) × ٣هـَ(س))}{(٣ هـ(س))^{٢}}$

قَ(٢) = $\frac{(١٨) - (٥ × ٣ × -١)}{٨١}$

= $\frac{١٨ + ١٥}{٨١}$ = $\frac{٣٣}{٨١}$

---

(٧٨) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل (-٢) = ٣
، لَ(-٢) = -١ ، هـ(-٢) = ٤ ، هـَ(-٢) = -٦
، فجد قَ(-٢) في كل مما يأتي :

أ) ق(س) = ل(س) × هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س) + ١}$

الحل :

أ) قَ(س) = ل(س) × هـَ(س) + هـ(س) × لَ(س)

قَ(-٢) = (٣ × -٦) + (٤ × -١)

= - ١٨ - ٤ = -٢٢

ب) قَ(س) = $\frac{(ل(س) + ١)(هـَ(س)) - (هـ(س))(لَ(س))}{(ل(س) + ١)^{٢}}$

قَ(-٢) = $\frac{(٤ × -٦) - (٤ × -١)}{(٤)^{٢}}$

= $\frac{-٢٤ + ٤}{١٦}$ = $\frac{-٢٠}{١٦}$

<u>الاتصال والاشتقاق</u>

<u>نظرية :</u> إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = س١ فإنه

يكون متصلاً عند س = س١

<u>ملاحظات على النظرية :</u>

١) ق قابل للاشتقاق عند س١ ⟸ ق متصل عند س١

٢) ق غير متصل عند س١ ⟸ ق غير قابل للاشتقاق عند س١

٣) ق متصل عند س١ ⟸ ليس بالضرورة أن يكون قابل للاشتقاق عند س١

١) قَ(٣) = ٧ ، ق(٣) = ٤ ، جد نهـا$_{س \leftarrow ٣}$(ق^{٢}(س) + ٤س^{٢}) :

الحل : ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٣ ، لان قَ(٣) موجودة لذلك ق(س) متصل عند س = ٣

⟸ نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = ق(٣) = ٤

المطلوب : (نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س))^{٢} + نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ (٤س^{٢})

= ١٦ + ٣٦ = ٥٢

٢) ق(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ ، ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٢

الحل : ق(٢) غير معرفة ($\frac{٣}{٠}$) لذلك ق(س) غير متصل عند س = ٢ لذلك قَ(٢) غير موجودة

ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س= ٢

٣) ق(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ ، ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٤

الحل : ق(٤) = نهـا$_{س \leftarrow ٤}$ق(س) = $\frac{٣}{٢}$

ق(س) متصل عند س = ٢

لذلك : قَ(س) = $\frac{-٣ \times ١}{(س - ٢)^{٢}}$

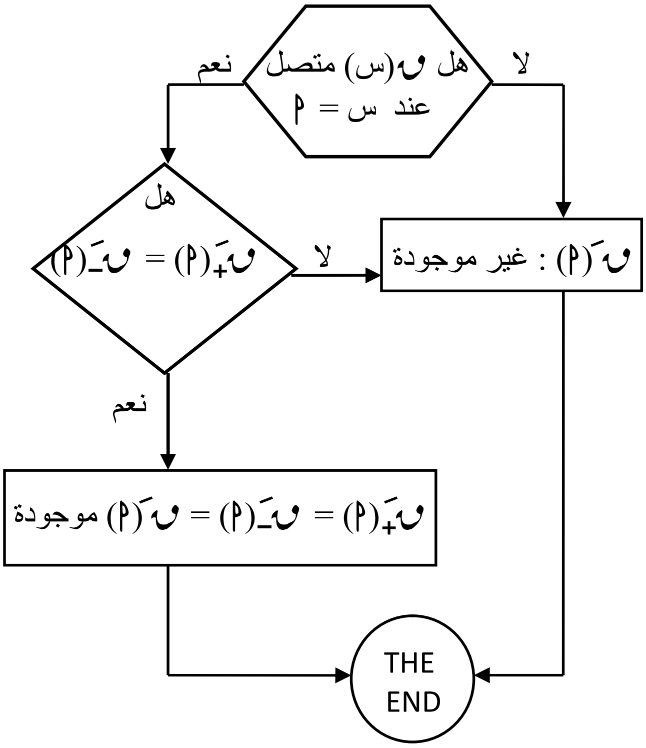
قَ(٤) = $\frac{-٣}{٤}$ ⟸ ق(س) قابل للاشتقاق عند س= ٤

<u>مشتقة الاقتران المتشعب باستخدام قواعد الاشتقاق :</u>

١) نشتق كل قاعدة على حدى ثم نزيل إشارة المساواة عند الفترات .

٢) المشتقة عند الأطراف دائماً غير موجودة .

٣) المشتقة عند نقاط عند التحول (س = أ) .



١) إذا كان ق(س) = { ٨ س^{٣} + ٤س ، س ≤ ١ ؛ ٨ س^{٢} + ١٢س - ٨ ، س > ١ }

جد قَ(س) :

الحل : قَ(س) = { ٢٤ س^{٢} + ٤ ، س < ١ ؛ ١٦س + ١٢ ، س > ١ ؛ ٢٨ ، س = ١ }

<u>ندرس الاتصال عند س =١</u>

ق(١) = نهـا$_{س \leftarrow ١}$ق(س) = ١٢

∴ ق(س) متصل عند س =١

قَ+(١) = ٢٨

قَ-(١) = ٢٨

⟸ قَ(١) = ٢٨

٢) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٤}{\text{س} + ١} & ، \text{س} \leq ١ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على ح

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{-٤}{(\text{س} + ١)^{٢}} & ، \text{س} < ١ \\ ١ & ، \text{س} > ١ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ١ \end{cases}$$

ندرس الاتصال ق(س) عند س =١

$\text{ق}(١) = \lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = ٢$

∴ ق(س) متصل عند س =١

$\text{ق}'_{+}(١) = ١$

$\text{ق}'_{-}(١) = \dfrac{-٤}{٤} = -١$

$\text{ق}'_{+}(١) \neq \text{ق}'_{-}(١)$

ق َ(١) : غير موجودة

٣) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، ١ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٤\text{س} - ٢ & ، ٢ < \text{س} \leq ١٠ \end{cases}$$

جد ق َ(س) :

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، ١ < \text{س} < ٢ \\ ٤ & ، ٢ < \text{س} < ١٠ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ١ ، ١٠ ، ٢ \end{cases}$$

ق َ(١) ، ق َ(١٠) : غير موجودة عند الأطراف

ندرس الاتصال ق(س) عند س =٢

$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) \neq \lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س})$

∴ ق(س) غير متصل عند س =٢

∴ ق َ(٢) : غير موجودة

٤) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، -٢ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٢\text{س} & ، ١ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$$

جد ق َ(س) ثم جد ق َ(٠) :

الحل :

٥) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ٩}{\sqrt{\text{س}} - ٣} & ، \text{س} \neq ٩ \\ ٦ & ، \text{س} = ٩ \end{cases}$$

جد ق َ(٩) :

الحل : $\text{ق}(٩) = ٦$

$\lim_{\text{س} \to ٩} \text{ق}(\text{س}) = ٦$

ق(س) متصل عند س = ٩

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}} + ٣ & ، \text{س} \neq ٩ \\ ٦ & ، \text{س} = ٩ \end{cases}$$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{١}{٢ \times \sqrt{\text{س}}} \longrightarrow \text{ق}'(٩) = \dfrac{١}{٦}$

٦)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٩ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$$

جد ق َ(س) :

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٦ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ٣ لأن $\text{ق}(٣) = \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$

$\text{ق}'(٣) = ٢ \times ٣ = ٦$

٧) $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، س \neq ١ \\ ٥ & ، س = ١ \end{cases}$

جد $قَ(س)$:

الحل :

$قَ(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، س \neq ١ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ١ \end{cases}$

ق(س) غير متصل عند س = ١ ، لذلك قَ(١) غير موجودة

---

٨) $ق(س) = س^{٣}\,|س - ٢|$ ، فابحث في قابلية الاقتران ق(س) للاشتقاق على ح (جد قَ(س)) :

الحل :

$|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ ٢ - س & ، س < ٢ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} س^{٤} - ٢س^{٣} & ، س \geq ٢ \\ ٢س^{٣} - س^{٤} & ، س < ٢ \end{cases}$

$قَ(س) = \begin{cases} ٤س^{٣} - ٦س^{٢} & ، س > ٢ \\ ٦س^{٢} - ٤س^{٣} & ، س < ٢ \\ & ، س = ٢ \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = ٢ لأن $ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س) = ٠$

$قَ_{+}(٢) = ٨$

$قَ_{-}(٢) = -٨$

$قَ_{+}(٢) \neq قَ_{-}(٢)$

∴ قَ(٢) : غير موجودة

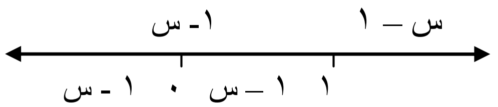
---

٩) إذا كان $ق(س) = |س| + |س - ١|$ ، جد قَ(س) :

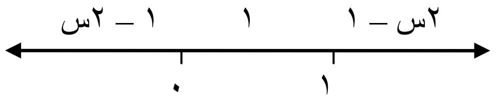
الحل :

$|س|$

$|س - ١|$



ق(س)



$ق(س) = \begin{cases} ١ - ٢س & ، س < ٠ \\ ١ & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ ٢س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$

$قَ(س) = \begin{cases} -٢ & ، س < ٠ \\ ٠ & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ ٢ & ، س > ١ \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = ٠ ، لكن $قَ_{+}(٠) \neq قَ_{-}(٠)$

لذلك قَ(٠) : غير موجودة

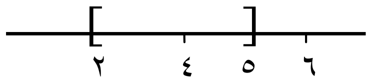
ق(س) متصل عند س = ١ ، لكن $قَ_{+}(١) \neq قَ_{-}(١)$

لذلك قَ(١) : غير موجودة

١٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\left[\frac{\text{س}}{٢}+١\right]}$ ، $\text{س} \in [٢ ، ٥]$

جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : ل = ٢



$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢} & ، ٢ \le \text{س} \le ٤ \\[2ex] \dfrac{\text{س}^{٢}}{٣} & ، ٤ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢\text{س}}{٢} & ، ٢ < \text{س} < ٤ \\[2ex] \dfrac{٢\text{س}}{٣} & ، ٤ < \text{س} < ٥ \end{cases}$$

$\text{ق}'(٢)$ ، $\text{ق}'(٥)$: غير موجودة (أطراف) ، $\text{ق}(\text{س})$ غير متصل عند س = ٤ لذلك $\text{ق}'(٤)$ غير موجودة

---

١١) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}] & ، ١ \le \text{س} < ٢ \\ |\text{س} - ٣| & ، ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

ابحث في قابلية ق للاشتقاق على مجاله واكتب قاعدة $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل :
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ - \text{س} & ، ٢ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{س} - ٣ & ، ٣ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < \text{س} < ٢ \\ -١ & ، ٢ < \text{س} < ٣ \\ ١ & ، ٣ < \text{س} < ٤ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ١ ، ٤ ، ٢ ، ٣ \end{cases}$$

$\text{ق}'(١)$ ، $\text{ق}'(٤)$: غير موجودة (أطراف)

* $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند س = ٢ لكن $\text{ق}'_{+}(٢) \neq \text{ق}'_{-}(٢)$

لذلك $\text{ق}'(٢)$ غير موجودة

* $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند س = ٣ لكن $\text{ق}'_{+}(٣) \neq \text{ق}'_{-}(٣)$

لذلك $\text{ق}'(٣)$ غير موجودة

---

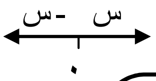
١٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ٢| + |\text{س}|$ ، بين أن

$\text{ق}'(٠)$: غير موجودة :

الحل : نعيد تعريف $\text{ق}(\text{س})$ حول العدد س = ٠

$\text{ق}(٠) = ٢ + ٠ = ٢$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \left((٢ - \text{س}) + |\text{س}|\right)$



$\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} (٢ - \text{س}) + (\text{س})$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} (٢ - \text{س}) + (-\text{س})$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} (٢) = ٢$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} (٢ - ٢\text{س})$

$\text{ق}(\text{س})$ متصل عند س = ٠

$\text{ق}'_{+}(٠) = ٠$ ، $\text{ق}'_{-}(٠) = -٢ \longrightarrow \text{ق}'(٠)$ غير موجودة

---

١٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + [\text{س} + ٣]$ ، جد $\text{ق}'(٣)$:

الحل : ندرس اتصال $\text{ق}(\text{س})$ عند س = ٣

$\text{ق}(٣) = ٩ + ٦ = ١٥$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \text{ق}(\text{س})$: غير موجودة

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣^{+}} (\text{س}^{٢} + (٦)) = ١٥$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^{-}} (\text{س}^{٢} + (٥)) = ١٤$

$\text{ق}(\text{س})$ غير متصل عند س = ٣ ، لذلك $\text{ق}'(٣)$ غير موجودة

---

١٤) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - ١٠)^{٣} \left[\dfrac{\text{س}}{٢}\right]$ ، جد $\text{ق}'(١٠)$:

الحل :

١٥) ق(س) = $\frac{[\text{س} + ٣,٠]}{\text{س} + ٥}$ ، جد قَ(٢) :

الحل :

---

١٦) ق(س) = |$\text{س}^{٢}$ - ٤س + ٤| ، جد قَ(س) :

الحل : ق(س) = |$(\text{س} - ٢)^{٢}$| = $(\text{س} - ٢)^{٢}$

قَ(س) = ٢$(\text{س} – ٢)^{١}$ × ١

---

١٧) ق(س) = { ٢س + أ ، س ≥ ١ ؛ ب $\text{س}^{٢}$ + ١ ، س < ١ }

جد أ ، ب علماً بأن ق قابل للاشتقاق عند س = ١ :

الحل : ق(١) = $\lim_{\text{س} \to ١}$ ق(س)

$\boxed{٢ + أ = ب + ١}$

قَ+(١) ≠ قَ-(١) ⟵ ٢ = ٢ب ⟵ $\boxed{ب = ١}$

٢ + أ = ٢ ⟵ $\boxed{أ = ٠}$

---

١٨) ق(س) = { أ س + ٢ ، س < ٣ ؛ $\text{س}^{٢}$ + ب ، س ≥ ٣ }

جد أ ، ب بحيث قَ(٣) موجودة :

الحل : ق(٣) = $\lim_{\text{س} \to ٣}$ ق(س)

$\boxed{٩ + ب = ٣أ + ٢}$

قَ+(٣) ≠ قَ-(٣) ⟵ $\boxed{أ = ٦}$

٩ + ب = ٢٠ ⟵ $\boxed{ب = ١١}$

---

١٩) ق(س) = { أ $\text{س}^{٢}$ - ب س ، س ≤ ٢ ؛ ٤ – ب $\text{س}^{٣}$ + أ س ، س > ٢ }

وكان ق اقتراناً للاشتقاق عند س = ٢
، فجد كلاً من الثابتين أ ، ب :

الحل : ق(٢) = $\lim_{\text{س} \to ٢}$ ق(س)

٤أ – ٢ب = ٤ – ٨ ب + ٢أ

٢أ + ٦ب = ٤ ⟵ $\boxed{أ + ٣ ب = ٢}$ ....(١)

قَ+(٢) ≠ قَ-(٢) ⟵ -١٢ ب + أ = ٤أ - ب

$\boxed{٣أ + ١١ ب = ٠}$ ....(٢)

٣أ + ١١ ب = ٠
-٣أ - ٩ب = -٦
٢ ب = -٦ ⟵ $\boxed{ب = -٣}$

أ – ٩ = ٢ ⟵ $\boxed{أ = ١١}$

٢٠)
$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٤}{|س|} & ، س \le ٢ \\ أس^{٢} + ب س & ، س > ٢ \end{cases}$$

جد قيم أ ، ب التي تجعل ق قابل للاشتقاق عند س = ٢

الحل :
$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س} & ، س \le ٢ \\ أس^{٢} + ب س & ، س > ٢ \end{cases}$$

$ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س) \longrightarrow ٢ = ٤أ + ٢ب$

$\boxed{٢أ + ب = ١}$ ١

$ق'_{+}(٢) = ق'_{-}(٢) \longrightarrow \boxed{-١ = ٤أ + ب}$ ٢

$\boxed{أ = -١}$ $\boxed{ب = ٣}$

٢١)
$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٤س & ، س \ge ١ \\ ٧س - ٢ & ، س < ١ \end{cases}$$

$هـ(س) = س^{٢} + ٣س^{٤}$ ، جد $(ق \times هـ)'(١)$:

الحل : $(ق \times هـ)'(١) = ق(١) \times هـ'(١) + هـ(١) \times ق'(١)$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٤ & ، س > ١ \\ ٧ & ، س < ١ \\ ٧ & ، س = ١ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ١ $\longrightarrow ق'_{+}(١) = ق'_{-}(١) = ٧$

$هـ'(س) = ٢س + ١٢س^{٣} \longrightarrow هـ'(١) = ١٤$

$(ق \times هـ)'(١) = (٥ \times ١٤) + (٤ \times ٧) = ٩٨$

٢٢) إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} ل(س) & ، س \le ج \\ ل'(ج)\,(س - ج) & ، س > ج \end{cases}$$

وكان ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = ج ، وكان ل(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = ج ، فأثبت أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ج ، ثم جد ق'(ج) :

الحل :
$$ق'(س) = \begin{cases} ل'(س) & ، س < ج \\ ل'(ج) & ، س > ج \end{cases}$$

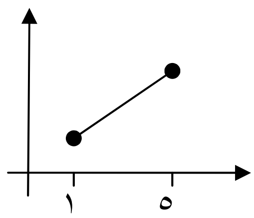
ق(س) متصل عند س = ج ، من معطيات السؤال

$ق'_{+}(ج) = ل'(ج)$

$ق'_{-}(ج) = ل'(ج)$

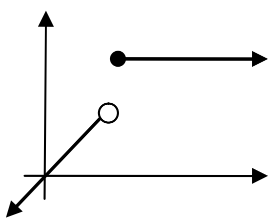
∴ $ق'(ج) = ل'(ج)$ قابل للاشتقاق عند س = ج

٢٣)



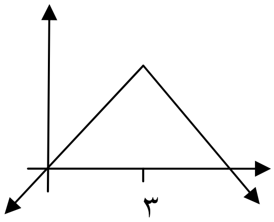
ق'(١) : غير موجودة
ق'(٥) : غير موجودة
} أطراف

٢٤)



ق'(٣) : غير موجودة } لأن ق(س) غير متصل عند س = ٣

٢٥)



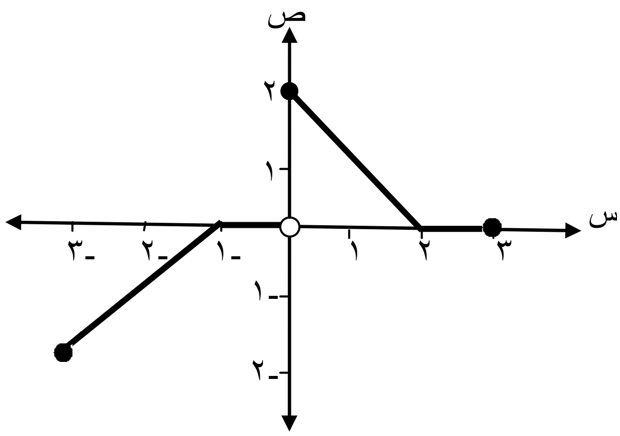
ق‌َ(٣) : غير موجودة } عدد لا نهائي من المماسات رأس مدبب

---

٢٦) اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [-٣ ، ٣] ، جد كلاً مما يأتي :

أ) قيم س حيث -٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل .

ب) قيم س حيث -٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير قابل للاشتقاق .



الحل : س ∈ { ٠ }

س ∈ {٠، ٢، -١}

<u>المشتقات العليا :</u>

١) ق‌َ(س) ، ص‌َ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، المشتقة الأولى .

٢) ق‌ً(س) ، ص‌ً ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ ، المشتقة الثانية .

٣) ق‌ًّ(س) ، ص‌ًّ ، $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ ، المشتقة الثالثة .

٤) ق$^{(٤)}$(س) ، ص$^{(٤)}$ ، $\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}}$ ، المشتقة الرابعة .

---

١) إذا كان ق(س) = ٤س^{٥} - ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١ ، فجد ق‌ًّ(س) :

الحل : ق‌َ(س) = ٢٠س^{٤} - ٦س^{٢} + ١٢س

ق‌ً(س) = ٨٠س^{٣} - ١٢س + ١٢

ق‌ًّ(س) = ٢٤٠س^{٢} - ١٢

---

٢) إذا كان ق(س) = ٥س^{٣} - ٤س^{٢} + ٦س + ١ ، فجد ق‌ً(-١) :

الحل : ق‌َ(س) = ١٥س^{٢} - ٨س + ٦

ق‌ً(س) = ٣٠س - ٨

ق‌ً(-١) = -٣٠ - ٨ = -٣٨

---

٣) إذا كان ق(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} ، جد أصفار ق‌ً(س) :

الحل : ق‌َ(س) = ٦س^{٢} - ٢س

ق‌ً(س) = ١٢س - ٢ = ٠

١٢س = ٢ ⟵ $\boxed{\text{س} = \frac{١}{٦}}$

---

٤) ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} ، جد أصفار المشتقة الأولى حيث س ∈ [-٣ ، ٤] :

الحل : ق‌َ(س) = ٣س^{٢} - ١٢س = ٠

٣س (س - ٤) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٠}$ $\boxed{\cancel{\text{س} = ٤}}$ مرفوضة

٥) ص = $\frac{س^{٢}+١}{س}$ ، جد صً :

الحل : ص = س + $\frac{١}{س}$

صَ = ١ - $\frac{١}{س^{٢}}$

صً = $\frac{١\times٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

---

٦) إذا كان كل من ل ، لَ ، لً ، قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان

ق(س) = س^{٢} ل(س) ، فجد قً(س) ، ق‴(س) :

الحل : قَ(س) = س^{٢} لَ(س) + ٢س ل(س)

قً(س) = س^{٢} لً(س) + ٢س لَ(س) + ٢س لَ(س) + ٢ل(س)

$\boxed{\text{قً(س) = س}^{٢}\text{ لً(س) + ٤س لَ(س) + ٢ل(س)}}$

ق‴(س) = س^{٢} ل‴(س) + ٢س لً(س) + ٤س لً(س)

+ ٤ لَ(س) + ٢ لَ(س)

$\boxed{\text{ق‴(س) = س}^{٢}\text{ ل‴(س) + ٦س لً(س) + ٦ لَ(س)}}$

---

٧) إذا كان ق(س) = (س^{٢} + ٣س) |س| ، جد قً(س) :

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣}+٣س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣}-٣س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$قَ(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+٦س & ، س > ٠ \\ -٣س^{٢}-٦س & ، س < ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \end{cases}$$

$$قً(س) = \begin{cases} ٦س+٦ & ، س > ٠ \\ -٦س-٦ & ، س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ٠

قَ$_{+}$(٠) = قَ$_{-}$(٠) ⟵ قَ(٠) = ٠

قً$_{+}$(٠) ≠ قً$_{-}$(٠) ⟵ قً(٠) غير موجودة

---

٨) ق(س) = أ س^{٣} + $\frac{س^{٤}}{٤}$ وكانت ق‴(٢) = ٢٠ ، جد أ :

الحل : قَ(س) = ٣أ س^{٢} + س^{٣}

قً(س) = ٦أ س + ٣س^{٢}

ق‴(س) = ٦أ + ٦س

ق‴(٢) = ٢٠ ⟵ ٦أ + ١٢ = ٢٠ ⟵ $\boxed{أ = \frac{٤}{٣}}$

---

٩) ق(س) = أ س^{٤} + $\frac{١٦}{س}$ ، أ ثابت ، وكان ق‴(٢) = ٩٠ ، فجد قيمة الثابت أ :

الحل : ق(س) = أ س^{٤} + ١٦س$^{-١}$

قَ(س) = ٤أ س^{٣} - ١٦س$^{-٢}$

قً(س) = ١٢أ س^{٢} + ٣٢س$^{-٣}$

ق‴(س) = ٢٤أ س - ٩٦س$^{-٤}$

ق‴(٢) = ٤٨أ - $\frac{٩٦}{١٦}$ = ٩٠

٤٨أ - ٦ = ٩٠ ⟵ ٤٨أ = ٩٦ ⟵ $\boxed{أ = ٢}$

---

١٠) إذا كان ق(س) = س^{ن} ، وكان ق‴(س) = ٢٤ س$^{ن-٣}$ ، فجد قيمة ن :

الحل : قَ(س) = ن س$^{ن-١}$

قً(س) = ن (ن - ١) س$^{ن-٢}$

ق‴(س) = ن (ن - ١) (ن - ٢) س$^{ن-٣}$ = ٢٤ س$^{ن-٣}$

ابحث عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها ٢٤

الأعداد هي ٢ ، ٣ ، ٤

أي أن ن = ٤

١١) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{١٠}$ س^{ن} ، وكان ق''(س) = أ س^{٢} ، فجد قيمة الثابت أ :

الحل :

---

١٢) إذا كانت ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٣} - ٦س^{٢} - س ، فجد قيم س التي تحقق ما يأتي :

أ) ق''(س) = ٠ ب) ق''(س) ≥ ٠ ج) ق''(س) ≤ ٠

الحل : ق'(س) = ٤س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س - ١

ق''(س) = ١٢س^{٢} + ١٨س − ١٢

أ) ١٢س^{٢} + ١٨س − ١٢ = ٠ ⟵ ٢س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠

(٢س - ١) (س + ٢) = ٠ ⟵ س = {$\frac{١}{٢}$ ، -٢}

ب) + + + + + + + + - - - - - + + + + + + +

-٢ $\frac{١}{٢}$

س ∈ (-∞ ، -٢] ∪ [$\frac{١}{٢}$ ، ∞)

ج) س ∈ (-٢ ، $\frac{١}{٢}$)

---

١٣) إذا كان ق(س) = ٨س − ٤(م − ٣) س^{٢}

، فجد قيم الثابت م الت تجعل ق''(س) < ٠ :

الحل : ق'(س) = ٨ − ٨(م − ٣) س

ق''(س) = -٨(م − ٣) < ٠

م − ٣ > ٠ ⟵ م > ٣

م ∈ (٣ ، ∞)

---

١٤) ص = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن

س^{٢}ص'' + ٣س ص' + ص = ٠

الحل : ص' = $\frac{-١}{س^{٢}}$ ، ص'' = $\frac{٢}{س^{٣}}$

= س^{٢}ص'' + ٣س ص' + ص

= س^{٢} × $\frac{٢}{س^{٣}}$ + ٣س × $\frac{-١}{س^{٢}}$ + $\frac{١}{س}$

= $\frac{٢}{س}$ - $\frac{٣}{س}$ + $\frac{١}{س}$ = ٠

---

١٥) إذا كان كل من الاقترانين ل ، هـ قابلاً للاشتقاق مرتين ، فأثبت أن :

(ل×هـ)''(س) = (ل''هـ)(س) + ٢(ل'×هـ')(س) + (ل×هـ'')(س)

الحل :

(ل×هـ)'(س) = ل(س) × هـ'(س) + هـ(س) × ل'(س)

(ل×هـ)''(س) = ل(س) × هـ''(س) + هـ'(س) × ل'(س)

+ هـ'(س) × ل'(س) + هـ(س) × ل''(س)

= (ل''هـ)(س) + ٢(ل'×هـ')(س) + (ل×هـ'')(س)

---

١٦) إذا كانت ل ، ق ، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثالثة وكان هـ(س) = ل(س) × ق(س)

، ل'(س) × ق'(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت فأثبت أن :

هـ'''(س) = ل(س) × ق'''(س) + ق(س) × ل'''(س)

الحل : هـ'(س) = ل(س) × ق'(س) + ق(س) × ل'(س)

هـ''(س) = ل × ق'' + ق' × ل' + ق × ل'' + ق' × ل'

$\boxed{\text{هـ''(س) = ل × ق'' + ق × ل'' + ٢جـ}}$

هـ'''(س) = ل × ق''' + ق'' × ل' + ق × ل''' + ل'' × ق'

= ل × ق''' + ق × ل''' + $\boxed{\text{ق'' × ل' + ل'' × ق'}}$

= ل × ق''' + ق × ل''' + ٠

١٧) جد قاعدة اقتران كثير حدود ق من الدرجة الثانية الذي فيه

ق(١) = ٣ ، ق'(١) = -٢ ، ق''(١) = ٤ :

الحل : ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

ق'(س) = ٢ أ س + ب

ق''(س) = ٢ أ

ق''(١) = ٢ أ = ٤ ⟵ $\boxed{\text{أ} = ٢}$

ق'(١) = ٢ أ + ب = -٢ ⟵ ٤ + ب = -٢ ⟵ $\boxed{\text{ب} = -٦}$

ق(١) = أ + ب + جـ = ٣ ⟵ -٤ + جـ = ٣ ⟵ $\boxed{\text{جـ} = ٧}$

<u>مشتقة الاقترانات الدائرية :</u>

١) إذا كان ق(س) = جا س ، أوجد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{٢\,\text{جتا}\,\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢}\ \text{جا}\,\boxed{\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}}}{٢ \times \boxed{\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{٢\,\text{جتا}(\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢})}{٢}$

$\boxed{\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \text{جتا}\,(\frac{٢\text{س}}{٢}) = \text{جتا س}}$

٢) إذا كان ق(س) = جتا س ، أوجد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جتا ع} - \text{جتا س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{-٢\,\text{جا}\,\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢}\ \text{جا}\,\boxed{\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}}}{٢ \times \boxed{\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{-٢\,\text{جا}(\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢})}{٢}$

$\boxed{\therefore \text{ق}'(\text{س}) = -\,\text{جا}\,(\frac{٢\text{س}}{٢}) = -\,\text{جا س}}$

٣) استخدم تعريف المشتقة الأولى لايجاد ق'(س) للاقتران ق(س) = ظا س :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ظا ع} - \text{ظا س}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\frac{\text{جا ع}}{\text{جتا ع}} - \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جا ع جتا س} - \text{جتا ع جا س}}{(\text{ع} - \text{س})\ \text{جتا ع جتا س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\boxed{\text{جا(ع} - \text{س)}}}{\boxed{(\text{ع} - \text{س})}\ \text{جتا ع جتا س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{١}{\text{جتا ع جتا س}}$

$\boxed{\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{قا}^{٢}\text{س}}$

٤) إذا كان ق(س) = قتا س ، اثبت باستخدام تعريف المشتقة الأولى أن ق'(س) = - قتا س ظتا س :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{قتا ع} - \text{قتا س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\frac{١}{\text{جا ع}} - \frac{١}{\text{جا س}}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جا س} - \text{جا ع}}{(\text{ع} - \text{س})\ (\text{جا ع})(\text{جا س})}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{٢\,\text{جتا}\,\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢}\ \text{جا}\,\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}}{(\text{جا ع})(\text{جا س})(٢)(\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢})}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{٢\,\text{جتا}\,\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢}}{(\text{جا ع})(\text{جا س})(-٢)}$

$\boxed{\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\,\text{جتا س}}{\text{جا س}} \times \frac{١}{\text{جا س}} = -\,\text{قتا س ظتا س}}$

٥) إذا كان ق(س) = ظتاس ، استخدم تعريف المشتقة لإيجاد قَ(س) :

الحل : $\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع - س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتاع - ظتاس}}{\text{ع - س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جتاع}}{\text{جاع}} - \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}}{\text{ع - س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاع جاس - جاع جتاس}}{\text{(ع - س) جاع جاس}}$$

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\boxed{\text{جا(س - ع)}}}{\boxed{\text{(ع - س)}}\ \text{جاع جاس}}$$

$$\boxed{\therefore \text{قَ(س)} = \dfrac{\text{-١}}{\text{جاس جاس}} = \dfrac{\text{-١}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \text{- قتا}^{٢}\text{س}}$$

٦) أوجد باستخدام تعريف المشتقة الأولى لايجاد قَ(س) للاقتران ق(س) = س جاس :

الحل : $\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع جاع - س جاس}}{\text{ع - س}}$

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع جاع - س جاع + س جاع - س جاس}}{\text{ع - س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع جاع - س جاع}}{\text{ع - س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جاع - س جاس}}{\text{ع - س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{(ع - س) جاع}}{\text{ع - س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س (جاع - جاس)}}{\text{ع - س}}$$

$$= \text{جاس} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س (٢ جتا}\dfrac{\text{ع + س}}{\text{٢}}\ \boxed{\text{جا}\dfrac{\text{ع - س}}{\text{٢}}}\text{)}}{\text{٢} \times \boxed{\dfrac{\text{ع - س}}{\text{٢}}}}$$

$$= \text{جاس} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢س جتا}\dfrac{\text{ع + س}}{\text{٢}}}{\text{٢}}$$

$$\boxed{\therefore \text{قَ(س)} = \text{جاس + س جتاس}}$$

٧) استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد قَ(س) للاقتران ق(س) = قا ٢س :

الحل : $\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع - س}}$

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{قا٢ع - قا٢س}}{\text{ع - س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{١}}{\text{جتا٢ع}} - \dfrac{\text{١}}{\text{جتا٢س}}}{\text{ع - س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا ٢س - جا ٢ع}}{\text{(ع - س) جتا ٢ع جتا ٢س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{-٢جتا}\dfrac{\text{٢س + ٢ع}}{\text{٢}}\ \text{جا}\dfrac{\text{٢س - ٢ع}}{\text{٢}}}{\text{(ع - س) جتا ٢ع جتا ٢س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{-٢ جا (س + ع)}}{\text{جتا ٢ع جتا ٢س}} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (س - ع)}}{\text{(ع - س)}}$$

$$\boxed{\therefore \text{قَ(س)} = \dfrac{\text{-٢} \times \text{جا ٢س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ ٢س}} \times \text{-١} = \text{٢ ظا ٢س قا ٢س}}$$

الاقتران الدائري	مشتقة الاقتران الدائري
جا ( )	جتا ( ) × مشتقة الزاوية
جتا ( )	- جا ( ) × مشتقة الزاوية
ظا ( )	قا^{٢}( ) × مشتقة الزاوية
ظتا ( )	- قتا^{٢}( ) × مشتقة الزاوية
قا ( )	قا ( ) ظا ( ) × مشتقة الزاوية
قتا ( )	- قتا ( ) ظتا ( ) ×مشتقة الزاوية

أمثلة متنوعة :

٨)

الاقتران	المشتقة
جا (س^{٢} + ٣)	
جا (١ – ٥س)	
جا $\left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + ٣}\right)$	

٩)

الاقتران	المشتقة
جتا (س^{٢} + ١)	
جتا (١ – ٧س)	
جتا $\left(\frac{س^{٢} + ٧}{٥س + ١}\right)$	

١٠)

الاقتران	المشتقة
ظا (س^{٢} + ١)	
ظا (١ – ٥س)	
ظا $\left(\frac{٧}{س^{٢} + ١}\right)$	

١١)

الاقتران	المشتقة
قا (٥س + ١)	
قا (٧س^{٢} + ١)	
قا ٧س	

١٢)

الاقتران	المشتقة
ظتا (س^{٧} + ١)	
ظتا (١ – ٧س)	
ظتا $\left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٧} + ٢}\right)$	

١٣)

الاقتران	المشتقة
قتا (٧س + ١)	
قتا (س^{٢} + ١)	
قتا ٥س	

<u>كمان أسئلة متنوعة :</u>

١٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}\,(\text{س} + \text{جا س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = -\,\text{جا}\,(\text{س} + \text{جاس})\,(١ + \text{جتا س})$

١٥) $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}\,(\text{جاس} + \text{س}^{٢})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}^{٢}\,(\text{جا س} + \text{س}^{٢})\,(\text{جتا س} + ٢\text{س})$

١٦) $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}\,(\text{جاس})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}^{٢}(\text{جا س}) \times \text{جتا س}$

١٧) $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}\,\left(\frac{\text{جتا س}}{\text{س}^{٢} + ١}\right)$

الحل :

١٨) $\text{ق}(\text{س}) = \text{قا}\,(\text{جاس})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}\,(\text{جا س}) \times \text{ظا}\,(\text{جا س}) \times \text{جتا س}$

١٩) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{جاس} + \text{جتا س})^{٥}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٥\,(\text{جاس} + \text{جتا س})^{٤} \times (\text{جتا س} - \text{جا س})$

٢٠) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{جاس} + \text{جتا س})^{\frac{٩}{٢}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٩}{٢}\,(\text{جاس} + \text{جتا س})^{\frac{٧}{٢}} \times (\text{جتا س} - \text{جا س})$

٢١) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{جاس} + \text{جتا س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{جتاس} - \text{جا س}}{٢\sqrt{\text{جاس} + \text{جتا س}}}$

٢٢) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \text{قا س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٣\text{س}^{٢} + \text{قا س ظا س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \text{قا س}}}$

٢٣) أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{س}^{٢} + \text{ظتا س}}$

الحل :

<u>أسئلة متنوعة :</u>

١) أذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\,\text{جا س} + ٦\,\text{س}$ ، فجد $\text{ق}'\left(\frac{\pi}{٣}\right)$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\,\text{جتا}\,(\text{س}) + ٦$

$\text{ق}'\left(\frac{\pi}{٣}\right) = ١ + ٦ = ٧$

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جتا س}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$ ، فجد $\text{ق}'\left(\frac{\pi}{٣}\right)$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\,\text{س جا س} - \text{جتا س}}{\text{س}^{٢}}$

$$\text{ق}'\left(\frac{\pi}{٣}\right) = \frac{-\frac{\pi}{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}}{\left(\frac{\pi}{٣}\right)^{٢}}$$

$$= \frac{-٣\sqrt{٣}}{٢\pi} - \frac{٩}{٢\pi^{٢}}$$

٣) إذا كان $\text{ص} = \text{م جاس} + \text{ب جتا س}$ ، $\text{م}، \text{ب} \in \text{ح}$

، فأثبت أن $\text{ص}'' + \text{ص} = ٠$:

الحل : $\text{ص}' = \text{م جتاس} - \text{ب جا س}$

$\text{ص}'' = -\,\text{م جاس} - \text{ب جتا س} = -\,(\text{م جاس} + \text{ب جتا س})$

أي أن $\text{ص}'' = -\,\text{ص}$ ومنه $\text{ص}'' + \text{ص} = ٠$

٤) إذا كان ق(س) = قتا س + ظتا س، فأثبت أن

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{جتاس - ١}}$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = -\ \text{قتاس ظتاس} - \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س}$

$= \frac{\text{-١}}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جاس}} - \frac{\text{١}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$

$= \frac{\text{- جتا س - ١}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} = \frac{\text{- (جتا س + ١)}}{\text{(١ - جتا س) (١ + جتا س)}}$

$= \frac{\text{-١}}{\text{١ - جتا س}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا س - ١}}$

٥) أثبت أن كلاً من ص = جتا س ، ص = جا س

، يعتبر حلاً للمعادلة ص + ص″ = ٠ :

الحل :

ص = جتا س	ص = جا س
ص′ = - جا س	ص′ = جتا س
ص″ = - جتا س	ص″ = - جا س
ص + ص″ = جتا س – جتا س = ٠	ص + ص″ = جا س – جا س = ٠

٦) ص = ا جاس + ب جتا س ، ا، ب ∈ ح

، أثبت أن : $(\text{ص}')^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} = \text{ا}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}$:

الحل :

٧) إذا كانت ص = س جتا س – ٤ جا س ، جد $\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{دس}^{\text{٢}}}$:

الحل : ص′ = - س جا س + جتا س – ٤ جتا س

$\boxed{\text{ص}' = \text{- س جا س - ٣ جتا س}}$

ص″ = - س جتاس - جا س + ٣جا س

$\boxed{\text{ص}'' = \text{- س جتا س + ٢ جا س}}$

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جتا س} & \text{، س} \geq \text{٠} \\ \text{اس + ب} & \text{، س} < \text{٠} \end{cases}$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{- جا س} & \text{، س} > \text{٠} \\ \text{ا} & \text{، س} < \text{٠} \end{cases}$

$\text{ق}'_{+}(\text{٠}) = \text{نها}_{\text{ع} \to \text{٠}^{+}} \frac{\text{ق(ع) - ق(٠)}}{\text{ع - ٠}} = \text{نها}_{\text{ع} \to \text{٠}} \frac{\text{جتا ع - ١}}{\text{ع}}$

$= \text{نها}_{\text{ع} \to \text{٠}^{+}} \frac{\text{-٢ جا}^{\text{٢}}(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ع})}{\text{ع}} = \text{٠}$

$\text{ق}'_{-}(\text{٠}) = \text{ا} \longrightarrow \boxed{\text{ا} = \text{٠}}$

$\text{ق}(\text{٠}) = \text{نها}_{\text{ع} \to \text{٠}^{-}} \text{ق(س)} \longrightarrow \boxed{\text{ب} = \text{١}}$

٩) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{جا س}|$ ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند $\text{س} = \pi$:

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{جا س} & ، 0 \le \text{س} \le \pi \\ \text{جا س} & ، \pi < \text{س} \le 2\pi \end{cases}$$

$$\text{ق}'_{+}(\pi) = \underset{\text{ع}\to\pi^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\pi)}{\text{ع} - \pi} = \underset{\text{ع}\to\pi^{+}}{\text{نها}} \frac{-\text{جا ع} - 0}{\text{ع} - \pi}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\pi^{+}}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}(\pi - \text{ع})}{\text{ع} - \pi} = 1$$

$$\text{ق}'_{-}(\pi) = \underset{\text{ع}\to\pi^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\pi)}{\text{ع} - \pi} = \underset{\text{ع}\to\pi^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{جا ع} - 0}{\text{ع} - \pi}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\pi^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\pi - \text{ع})}{\text{ع} - \pi} = -1$$

$\text{ق}'_{+}(\pi) \ne \text{ق}'_{-}(\pi) \longrightarrow \text{ق}'(\pi)$: غير موجودة

---

١٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا س} - \frac{1}{2}\text{س}$ ، $\text{س} \in [0 ، 2\pi]$ ، فجد قيمة (قيم) س التي تجعل المماس لمنحنى ق أفقياً :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتا س} - \frac{1}{2} = 0$

$\text{جتا س} = \frac{1}{2}$

$\text{س} = \frac{\pi}{3} ، \frac{5\pi}{3}$

---

١١) جد قيم س في الفترة $[-2\pi ، 2\pi]$ التي تحقق المعادلة $\text{ق}'(\text{س}) = 0$ في كل مما يأتي :

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \text{جتا س}$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{قا س}$

الحل : أ) $\text{ق}'(\text{س}) = 1 - \text{جا س} = 0$

$\text{جا س} = 1$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} ، \frac{-3\pi}{2}$

ب) $\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا س ظا س} = \frac{1}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

$= \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = 0$

$\text{جا س} = 0 \longrightarrow \text{س} = -\pi ، 0 ، \pi$

---

١٢) إذا كان $\text{ص} = (\text{قا س} + \text{ظا س})^2$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ٠ :

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2(\text{قاس} + \text{ظاس})^1 \times (\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س})$

$= 2(1 + 0)(0 + 1) = 2$

---

١٣) إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}^4\text{س}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : $\text{ص} = (\text{ظاس})^4$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4(\text{ظاس})^3 \times \text{قا}^2\text{س}$

$= 4\,\text{ظا}^3\text{س} \times \text{قا}^2\text{س}$

---

١٤) إذا كان $\text{ص} = \text{جتا}^3(\text{س}^2 - 1)^2$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$

$(3\text{جتا}^2(\text{س}^2 - 1)^2)(-\text{جا}(\text{س}^2 - 1)^2)(2(\text{س}^2 - 1) \times 2\text{س})$

$= -12\text{س}(\text{س}^2 - 1)\,\text{جتا}^2(\text{س}^2 - 1)^2\,\text{جا}(\text{س}^2 - 1)^2$

---

١٥) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^2 3\text{س}$ فإن $\text{ق}'(\frac{\pi}{2})$ تساوي :

أ) ٣   ب) ٠   جـ) $\sqrt{2}$ د) ١

الحل :

---

١٦) $\text{ق}(\text{س}) = \text{قا}^3 2\text{س}$ ، أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{6}$:

الحل : $\text{ص} = (\text{قا}2\text{س})^3$

$\text{ص}' = 3(\text{قا}2\text{س})^2 \times \text{قا}2\text{س ظا}2\text{س} \times 2$

$\text{ص}'(\frac{\pi}{6}) = 6\text{قا}^3\frac{\pi}{3}\ \text{ظا}\frac{\pi}{3} = 48\sqrt{3}$

١٧) إذا كان ص = جـا^{٣} ٤س ، أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = $\frac{\pi}{١٢}$:

الحل : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ جـا^{٢} ٤س × جتـا ٤س × ٤

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{١٢}}$ = ٣ جـا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ × جتـا $\frac{\pi}{٣}$ × ٤

= ٣ × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × ٤ = $\frac{٩}{٢}$

---

١٨) جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للعلاقة التالية ص = جـا(ظـا^{٢}س) :

الحل :

---

١٩) إذا علمت أن ص = (قـا س + ظـا س)^{ن} أثبت أن

ص$'$ = ن ص قـا س :

الحل :

ص$'$ = ن (قـاس + ظـاس)$^{ن-١}$ × (قـاس ظـاس + قـا^{٢}س)

ص$'$ = ن (قـاس + ظـاس)$^{ن-١}$ × قـاس (ظـاس + قـاس)

ص$'$ = ن قـاس (قـاس + ظـاس)^{ن}

ص$'$ = ن قـاس ص وهو المطلوب

---

٢٠) إذا كان ص = ظـا س + $\frac{١}{٣}$ ظـا^{٣}س

، أثبت أن ص$'$ = قـا^{٤}س :

الحل : ص$'$ = قـا^{٢}س + $\frac{١}{٣}$ × ٣ ظـا^{٢}س × قـا^{٢}س

ص$'$ = قـا^{٢}س (١ + ظـا^{٢}س)

∴ ص$'$ = قـا^{٢}س قـا^{٢}س = قـا^{٤}س

---

٢١) إذا كان ص = جـا^{٤}س ، أثبت أن

ص$''$ + ١٦ص = ١٢ جـا^{٢}س :

الحل :

---

٢٢) ص = ظـا^{٢}س ، أثبت أن

ص$''$ = ٢(١ + ص)(١ + ٣ص) :

الحل :

قاعدة السلسلة :

ص ⟸ ع ⟸ س

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

١) ص = $٣ع^{٣} + ٢$ ، ع = $س^{٢} + ٤$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٩ع^{٢}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢س$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= (٩ع^{٢})(٢س) = ٩(س^{٢} + ٤)^{٢}(٢س)$$

٢) ع = $ص^{٢} + ص + ١$ ، ص = $\frac{٢}{س}$ ، جد $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$:

الحل : $\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = ٢ص + ١$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢}{س^{٢}}$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{دع}}{\text{دص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$= (٢ص + ١)\left(\frac{-٢}{س^{٢}}\right) = \left(٢ \times \frac{٢}{س} + ١\right)\left(\frac{-٢}{س^{٢}}\right)$$

$$= \frac{-٨}{س^{٣}} - \frac{٢}{س^{٢}}$$

٣) ص = $ع^{٢} - \frac{٨}{ع}$ ، ع ≠ ٠ ، ع = $٢س\sqrt{س}$

، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما ص = ٠ :

الحل : ص = $ع^{٢} - \frac{٨}{ع}$ ، ع = $٢س^{\frac{٣}{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٢ع + \frac{٨}{ع^{٢}}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٣س^{\frac{١}{٢}}$

عندما ص = ٠ ⟵ $ع^{٢} - \frac{٨}{ع} = ٠$ ⟵ $ع^{٣} = ٨$ ⟵ $\boxed{ع = ٢}$

ع = ٢ ⟵ $٢ = ٢س^{\frac{٣}{٢}}$ ⟵ $\boxed{س = ١}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left(٢ع + \frac{٨}{ع^{٢}}\right) \times (٣س^{\frac{١}{٢}})$$

$$= \left(٤ + \frac{٨}{٤}\right) \times ٣ = ٦ \times ٣ = ١٨$$

---

٤) ص = $ع^{٣} - ع$ ، ع = $ل^{٣} + ١$ ، ل = $\frac{١}{س^{٢}}$

، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = -١ :

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٣ع^{٢} - ١$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دل}} = ٣ل^{٢}$ ، $\frac{\text{دل}}{\text{دس}} = \frac{-٢س}{س^{٤}} = \frac{-٢}{س^{٣}}$

$\boxed{س = -١ \quad ، \quad ل = ١ \quad ، \quad ع = ٢}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٣ع^{٣} - ١)(٣ل^{٢})\left(\frac{-٢}{س^{٣}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١١ \times ٣ \times ٢ = ١٦$$

٥) إذا كانت س = جاہ ، $\frac{\text{دہ}}{\text{دم}} = ٨$ ،

، جد $\frac{\text{دس}}{\text{دم}}$ عندما ہ = $\frac{٢\pi}{٣}$:

الحل :

٦) ص = $(ع^{٢} - ١٠ع + ١)^{\frac{٢}{٣}}$ ، ع = $س^{٣} + ١$

، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما ع = ٩ :

الحل :

٧) إذا كان ص = $ل^{٦} + ٢ل + ١$ ، س = $٥ل^{٢} + ٦$

، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دل}} = ٦ل^{٥} + ٥$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دل}} = ١٠ل$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دل}} \times \frac{\text{دل}}{\text{دس}} = \frac{٦ل^{٥} + ٥}{١٠ل} \quad \#$$

* هام (IMPORTANT)

العلاقة	المشتقة
ق(س)	ق'(س)
ق(٢س)	ق'(٢س) × ٢
ق(س^{٢})	ق'(س^{٢}) × ٢س
ق(جاس)	ق'(جاس) × جتاس
(ق(س))^{٣}	٣(ق(س))^{٢} × ق'(س)
(ق(س))^{١٠}	١٠(ق(س))^{٩} × ق'(س)
ق(س جاس)	(ق'(س جاس))(س جتاس + جاس)
(ق(س^{٢}))^{٥}	٥(ق(س^{٢}))^{٤} × ق'(س^{٢}) × ٢س
(ق(جاس))^{٢}	٢(ق(جاس)) × ق'(جاس) × جتاس
س^{٢} ق(٥س)	س^{٢} × ق'(٥س) × ٥ + ق(٥س) × ٢س

١) إذا كان ص = ق(س^{٢}) وكان ق(٩) = ١٠ ، أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٣ :

الحل : ص = ق(س^{٢}) ⟵ $\frac{دص}{دس}$ = ق'(س^{٢}) × ٢س

⟸ $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٣}$ = ق'(٩) × ٢ × ٣ = ١٠ × ٦ = ٦٠

٢) إذا كان ص = ق(٥س + ١) × س^{٢} وعلمت أن ق(١١) = ٧ ، أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٢ :

الحل :

$\frac{دص}{دس}$ = ق(٥س + ١) × ٢س + س^{٢} × ق'(٥س + ١) × ٥

⟸ $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$ = ق(١١) × ٤ + ٤ × ق'(١١) × ٥

= (٤ × ٤) + (٤ × ٧ × ٥) = ١٥٦

٣) إذا كان ق(٢س) = س^{٣} + ٤س + ١ ، أوجد ق'(١٠) :

أ) ٣٠٤ ب) ٦٠٨ ج) ١٥٢ د) $\frac{٧٩}{٢}$

الحل : ق'(٢س) × ٢ = ٣س^{٢} + ٤

٢س = ١٠
س = ٥

ق'(١٠) × ٢ = ٧٩

ق'(١٠) = $\frac{٧٩}{٢}$

٤) إذا كان ق(٥س) = س^{٣} + ١ ، أوجد ق'(١٥) :

أ) ٦٧٥ ب) $\frac{٢٧}{٥}$ ج) $\frac{٥}{٢٧}$ د) $\frac{١}{٦٧٥}$

الحل : ق'(٥س) × ٥ = ٣س^{٢}

٥س = ١٥
س = ٣

ق'(٥س) = $\frac{٣س^{٢}}{٥}$

ق'(١٥) = $\frac{٢٧}{٥}$

٥) إذا كان س ق(٢س + ١) = ٢س^{٣} + ٢ ، أوجد ق'(٣) :

أ) ٠ ب) -١ ج) ١ د) ٢

الحل :

٦) إذا كان هـ(س) = ق(جا ٢س) ، وكان ق'($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٨ ، جد هـ'($\frac{\pi}{٦}$) :

الحل : هـ'(س) = ق'(جا ٢س) × جتا(٢س) × ٢

هـ'($\frac{\pi}{٦}$) = ق'($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) × $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ٨

٧) إذا كان ق(س^{٣} - ١) = $\frac{١}{س}$ - س^{٢} ، فجد قَ(٧) :

الحل :

٨) إذا كان ق(٤س) = $\frac{د}{دس}$ (س^{٢} + ٣) ، جد قَ(٤) :

الحل : قَ(٤س) × ٤ = ٢س

٤س = ٤
س = ١

قَ(٤) × ٤ = ٢

قَ(٤) = $\frac{١}{٢}$

٩) يقال للاقتران ق بأنه زوجي إذا كان ق(-س) = ق(س) لجميع قيم س ، وأنه فردي إذا كان ق(-س)= - ق(س) لجميع قيم س . أثبت ما يأتي :

أ) إذا كان ق(س) اقتراناً فردياً قابلاً للاشتقاق ، فإن قَ(س) اقتران زوجي .

ب) إذا كان ق(س) اقتراناً زوجياً قابلاً للاشتقاق ، فإن قَ(س) اقتران فردي .

الحل :

أ) ق اقتران فردي ، أي أن ق(-س) = - ق(س)

باشتقاق الطرفين :

- قَ(- س) = - قَ(س) ⟵ قَ(- س) = قَ(س)

∴ قَ(س) اقتران زوجي

ب) ق اقتران زوجي ، أي أن ق(-س) = ق(س)

باشتقاق الطرفين :

- قَ(- س) = قَ(س) ⟵ قَ(- س) = - قَ(س)

∴ قَ(س) اقتران فردي

١٠) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان

ق(جا ٢س) = قتا(٢س) ، حيث س ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٣}$ [، فجد

قَ($\frac{١}{٢}$) :

الحل :

قَ(جا ٢س) × جتا(٢س) × ٢ = - قتا(٢س) ظتا(٢س) × ٢

جا (٢س) = $\frac{١}{٢}$ ⟵ ٢س = $\frac{\pi}{٦}$ ⟵ $\boxed{س = \frac{\pi}{١٢}}$

قَ($\frac{١}{٢}$) × جتا($\frac{\pi}{٦}$) × ٢ = - قتا($\frac{\pi}{٦}$) ظتا($\frac{\pi}{٦}$) × ٢

قَ($\frac{١}{٢}$) × ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = - ٢ × $\sqrt{٣}$ × ٢

قَ($\frac{١}{٢}$) = - ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = - ٤ #

١١) إذا كان هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان

ص = جا^{ن}(هـ(س)) ، حيث ن عدد صحيح فأثبت أن :

$\frac{دص}{دس}$ = ن جا$^{ن-١}$ (هـ(س)) جتا(هـ(س)) × هـَ(س)

الحل : نفرض أن : ع = هـ(س)

ص = جا^{ن}(ع) ، ع = هـ(س)

$\frac{دص}{دع}$ = ن جا$^{ن-١}$ (ع) × جتا ع ، $\frac{دع}{دس}$ = هـَ(س)

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$

$\frac{دص}{دس}$ = ن جا$^{ن-١}$ (ع) × جتا (ع) × هـَ(س)

$\frac{دص}{دس}$ = ن جا$^{ن-١}$ (هـ(س)) × جتا (هـ(س)) × هـَ(س) #

*** تركيب الاقترانات :**

* (ق o هـ) (س) = ق (هـ(س))
* (ق o هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)
* (ق o هـ)َ(م) = قَ(هـ(م)) × هـَ(م)
* (هـ o ق)َ(م) = هـَ(ق (م)) × قَ(م)
* (ق o هـ)َ(٥) = قَ(هـ(٥)) × هـَ(٥)
* (هـ o ق)َ(٥) = هـَ(ق (٥)) × قَ(٥)
* (قً o هـ)َ(م) = قًً(هـ(م)) × هـَ(م)
* (قَ o هـً)َ(م) = قً(هـً(م)) × هـًً(م)
* (قً o هـَ)َ(م) = قًً(هـَ(م)) × هـً(م)
* (ق o ق)َ(م) = قَ(ق (م)) × قَ(م)
* (قً o قَ)َ(م) = قًً(قَ(م)) × قً(م)
* (قًً o ق)َ(م) = قًًً(ق(م)) × قَ(م)

١) إذا كان هـ(س)= √س ، ق(س)= س^{٣} ، جد (ق o هـ)َ(٤) :

الحل : (ق o هـ)َ(٤) = قَ(هـ(٤)) × هـَ(٤)

قَ(س) = ٣س^{٢} هـ(س) = √س   هـَ(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

= قَ(هـ(٤)) × هـَ(٤)

= قَ(٢) × هـَ(٤) = ١٢ × $\frac{١}{٤}$ = ٣

٢) إذا كان ق(س)=س^{٤} - ٢ ، فإن قيمة (ق o ق)َ(١) تساوي :

م) ٠   ب) ١   جـ) - ١٦   ى) ١٦

الحل : ق(س)=س^{٤} - ٢ ⟵ قَ(س) = ٤س^{٣}

(ق o ق)َ(١) = قَ(ق (١)) × قَ(١)

= قَ(-١) × ٤ = -٤ × ٤ = - ١٦

٣) إذا كان ق(س)= √(س + ١) ، وكان هـ(س)= م س^{٣} وكان (هـ o ق)َ(٣) = ١٢ ، فما قيمة الثابت م :

الحل : (هـ o ق)َ(٣) = هـَ(ق (٣)) × قَ(٣) = ١٢

$\boxed{قَ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}} ⟵ قَ(٣) = \frac{١}{٢ × ٢} = \frac{١}{٤}}$

هـَ(٢) × $\frac{١}{٤}$ = ١٢ ⟵ هـَ(٢) = ٤٨

$\boxed{هـَ(س) = ٣م س^{٢}}$ ⟵ هـَ(٢) = ١٢م = ٤٨ ⟵ $\boxed{م = ٤}$

٤) إذا كانت قَ(س)= $\frac{١}{س^{٢}+١}$ ، هـ(س) = ظا س أثبت أن : (ق o هـ)َ(س) = ١ :

الحل : ق(س) = #   ، هـ(س) = ظا س

قَ(س) = $\frac{١}{س^{٢}+١}$ ، هـَ(س) = قا^{٢}س

(ق o هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

= قَ(ظا س) × قا^{٢}س

= $\frac{١}{ظا^{٢}س + ١}$ × قا^{٢}س = $\frac{١}{قا^{٢}س}$ × قا^{٢}س = ١

٥) إذا كان ق(س)=س^{٣} + ٢س ، هـ(س)=س^{٢} جد (قَ o هـ)َ(١) :

الحل : ق(س)=س^{٣} + ٢س   ، هـ(س)=س^{٢}

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢   ، هـَ(س)=٢س

قً(س) = ٦س

(قَ o هـ)َ(١) = قً(هـ(١)) × هـَ(١)

= قً(١) × ٢

= ٦ × ٢ = ١٢

٦) إذا كان ق(س)=س^{٣} - ٢ ، فما قيمة (قَ o ق)َ(١) :

الحل :

٧) إذا كان ق(س)=س^{٢} × |س|^{٥} ، هـَ(٢)=٤ ، هـ(٢)=-١ ، جد (ق o هـ)َ(٢) :

الحل : (ق o هـ)َ(٢) = قَ(هـ(٢)) × هـَ(٢)

= قَ(-١) × ٤ = -٧ × ٤ = -٢٨

لإيجاد قَ(-١) ⟸ ق(س) = س^{٢} × - س^{٥} = -س^{٧}

قَ(س) = -٧ س^{٦}

قَ(-١) = -٧ × ١ = -٧

٨) إذا كان ق(س)= أ جا س ، حيث أ ثابت أ ≠ ٠ ،

هـ(س) = $\frac{٣س}{س^{٢}+١}$ وكان (هـ o ق)َ($\frac{\pi}{٦}$) = ٠ ، جد مجموعة قيم أ :

الحل : قَ(س) = أ جتا (س)

هـَ(س) = $\frac{(س^{٢}+١)(٣) - (٣س)(٢س)}{(س^{٢}+١)^{٢}}$ = $\frac{-٣س^{٢}+٣}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

(هـ o ق)َ($\frac{\pi}{٦}$) = هـَ(ق($\frac{\pi}{٦}$)) × قَ($\frac{\pi}{٦}$)

٠ = هـَ($\frac{١}{٢}$ أ) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ = ٠ ⟵ أ = ٠ (تهمل من الفرض)

هـَ($\frac{١}{٢}$ أ) = ٠ ⟵ $\frac{(\frac{-٣}{٤}أ^{٢}+٣)}{(\frac{١}{٤}أ^{٢}+١)^{٢}}$ = ٠

$\frac{-٣}{٤}$ أ^{٢} = -٣ ⟵ ٣أ^{٢} = ١٢ ⟵ أ^{٢} = ٤

$\boxed{أ = \pm ٢}$

٩) إذا كان ق(س)=س^{٣} ، هـ(٢)=٣ ، هـَ(٢)=-٢ ، هـً(٢)=٥ ، احسب (ق o هـ)ً(٢) :

الحل : ق(س)=س^{٣} ، هـ(٢) = ٣

قَ(س) = ٣س^{٢} ، هـَ(٢)=-٢

قً(س) = ٦س ، هـً(٢)=٥

(ق o هـ)َ(٢) = قَ(هـ(٢)) × هـَ(٢)

(ق o هـ)ً(٢) = قَ(هـ(٢))×هـً(٢)

+ هـَ(٢)×قً(هـ(٢))×هـَ(٢)

= (قَ(٣) × ٥) + (-٢ × ١٨ × -٢)

= (٢٧ × ٥) + (٤ × ١٨)

= ١٣٥ + ٧٢ = ٢٠٧

١٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$ ، فإن $(\text{ق} \circ \text{هـ})''(-١)$:

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٢$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) = ٦\text{س}$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س}$ ، $\text{هـ}''(\text{س}) = ٦$

$\text{ق}'''(\text{س}) = ٦$

$(\text{ق}' \circ \text{هـ})'(-١) = \text{ق}''(\text{هـ}(-١)) \times \text{هـ}'(-١)$

$(\text{ق}' \circ \text{هـ})'(-١) = \text{ق}''(\text{هـ}(-١)) \times \text{هـ}''(-١)$

$+ \text{هـ}'(-١) \times \text{ق}'''(\text{هـ}(-١)) \times \text{هـ}'(-١)$

$= (\text{ق}''(٣) \times ٦) + (-٦ \times ٦ \times -٦)$

$= (١٨ \times ٦) + (٢١٦)$

$= ١٠٨ + ٢١٦ = ٣٢٤$

<u>الإشتقاق الضمني :</u>

١) إذا كان $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$ ، أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $(٣ ، ٤)$:

الحل : $٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\frac{٢\text{ص}}{٢\text{س}} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\text{س}}{٢\text{ص}} \longrightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{(٣،٤)} = \frac{-٣}{٤}$

---

٢) إذا كان $٤\text{ص}^{٢} - \text{جـاص} = \text{س}^{٢}$ ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$:

الحل : $٨\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{جتـاص} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} (٨\text{ص} - \text{جتـاص}) = ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}}{٨\text{ص} - \text{جتـاص}}$

---

٣) إذا كان $\text{س} + \text{ص}^{٢} + ٥\text{س}\text{ص} = ٧\text{س}$ ، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $(١ ، ١)$ تساوي :

الحل : $١ + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٥\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص} \times ٥ = ٧$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} (٢\text{ص} + ٥\text{س}) = ٦ - ٥\text{ص}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٦ - ٥\text{ص}}{٢\text{ص} + ٥\text{س}}$

$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{(١ ، ١)} = \frac{٦ - ٥}{٢ + ٥} = \frac{١}{٧}$ #

٤) إذا كان $\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣} = ٦\,\text{س ص}$ ، جد $\text{ص}'$ عند (٣ ، ٣) :

الحل : $٣\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢}\text{ص}' = ٦\,\text{س} \times \text{ص}' + \text{ص} \times ٦$

$٣\text{ص}^{٢}\text{ص}' - ٦\,\text{س ص}' = ٦\text{ص} - ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ص}'(٣\text{ص}^{٢} - ٦\text{س}) = ٦\text{ص} - ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ص}' = \dfrac{٦\text{ص} - ٣\text{س}^{٢}}{٣\text{ص}^{٢} - ٦\text{س}}$

$\text{ص}'\Big|_{(٣،٣)} = \dfrac{١٨ - ٢٧}{٢٧ - ١٨} = -١$

٥) إذا كان $\text{س ص}^{٢} - \text{ص س}^{٢} = ٢$ ، جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (١ ، ٢) :

الحل :

٦) إذا كان $٢\text{س ص} - \text{ص}^{٣} + ١ = \text{س} + ٢\text{ص}$ ، أوجد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل :

$(٢\text{س} \times \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ٢) - ٣\,\text{ص}^{٢}\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ + ٢\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}(٢\text{س} - ٣\text{ص}^{٢} - ٢) = ١ - ٢\text{ص}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١ - ٢\,\text{ص}}{٢\text{س} - ٣\text{ص}^{٢} - ٢}$

٧) إذا كان $(\text{س} - \text{ص})^{٥} = \text{س}^{٢}$ ، جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (١ ، ٠) :

الحل : $٥(\text{س} - \text{ص})^{٤}(١ - \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}) = ٢\text{س}$

$١ - \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٢\text{س}}{٥(\text{س} - \text{ص})^{٤}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ - \dfrac{٢\text{س}}{٥(\text{س} - \text{ص})^{٤}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(١،٠)} = ١ - \dfrac{٢}{٥ \times ١} = ١ - \dfrac{٢}{٥} = \dfrac{٣}{٥}$

٨) إذا كان $\dfrac{٤}{\text{س}} + \dfrac{٢}{\text{ص}} = ٣$ ، جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (٤ ، ١) :

الحل : $\dfrac{٢}{\text{ص}} = ٣ - \dfrac{٤}{\text{س}} \Longleftarrow \dfrac{٢}{\text{ص}} = \dfrac{٣\text{س} - ٤}{\text{س}}$

$\dfrac{\text{ص}}{٢} = \dfrac{\text{س}}{٣\text{س} - ٤} \Longleftarrow \boxed{\text{ص} = \dfrac{٢\text{س}}{٣\text{س} - ٤}}$

$\text{ص}' = \dfrac{(٣\text{س} - ٤)(٢) - (٢\text{س})(٣)}{(٣\text{س} - ٤)^{٢}}$

$\text{ص}'\Big|_{(٤،١)} = \dfrac{١٦ - ٢٤}{(٨)^{٢}} = \dfrac{-٨}{٦٤} = \dfrac{-١}{٨}$

٩) جد $\dfrac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ لكل مما يلي :

أ) $٤\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} = ١٦$

الحل : $٨\text{س} + ٦\text{ص}\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

$\dfrac{٦\text{ص}}{٦\text{ص}}\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-٨\text{س}}{٦\text{ص}}$

$\boxed{\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-٤\,\text{س}}{٣\text{ص}}}$

$\dfrac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \dfrac{-٤}{٣}\left(\dfrac{\text{ص} - \text{س ص}'}{\text{ص}^{٢}}\right)$

$= \dfrac{-٤}{٣}\left(\dfrac{\text{ص} - \text{س}\,\dfrac{-٤\,\text{س}}{٣\text{ص}}}{\text{ص}^{٢}}\right)$

ب) جـاس $= \sqrt{\text{ص}} + ٢$

الحل : $\text{جتـاس} = \frac{\text{صَ}}{٢\sqrt{\text{ص}}} \longrightarrow \boxed{\text{صَ} = ٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{جتـاس}}$

$$\text{صً} = ٢\sqrt{\text{ص}} \times \text{- جـاس} + \text{جتـاس} \times ٢ \times \frac{\text{صَ}}{٢\sqrt{\text{ص}}}$$

$$\text{صً} = -٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{جـاس} + \frac{\text{صَ جتـاس}}{\sqrt{\text{ص}}}$$

$$\text{صً} = -٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{جـاس} + \frac{٢\cancel{\sqrt{\text{ص}}}\ \text{جتـاس}}{\cancel{\sqrt{\text{ص}}}} \times \text{جتـاس}$$

$$\text{صً} = -٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{جـاس} + ٢\ \text{جتا}^{٢}\text{س}$$

١٠) إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ١ ، أثبت أن :

ص^{٣} صً + ١ = ٠ :

الحل : ٢س + ٢ص صَ = ٠

$$٢\text{ص صَ} = -٢\text{س} \longrightarrow \boxed{\text{صَ} = \frac{\text{- س}}{\text{ص}}}$$

$$\text{صً} = \frac{\text{ص} \times -١ - \text{- س} \times \text{صَ}}{\text{ص}^{٢}}$$

$$\text{صً} = \frac{\text{- ص} + \text{س} \times \frac{\text{- س}}{\text{ص}}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{\text{- ص}^{٢}\text{ - س}^{٢}}{\text{ص}^{٣}}$$

$$\boxed{\text{صً} = \frac{\text{- ص}^{٢}\text{ - س}^{٢}}{\text{ص}^{٣}}}$$

<u>الأيمن :</u> $\text{ص}^{٣}\text{صً} + ١ = \text{ص}^{٣} \times \frac{\text{- ص}^{٢}\text{ - س}^{٢}}{\text{ص}^{٣}} + ١$

$= -١ + ١ = ٠$ #

١١) إذا كان س = ظـاص ، أثبت أن :

صً (١ + س^{٢}) = - جـا ٢ص = ٠ :

الحل : $١ = \text{قـا}^{٢}\text{ص} \times \text{صَ} \longrightarrow \text{صَ} = \frac{١}{\text{قـا}^{٢}\text{ص}}$

$$\boxed{\text{صَ} = (\text{جتـاص})^{٢}}$$

$$\text{صً} = ٢(\text{جتـاص})^{١} \times \text{- جـا ص} \times \text{صَ}$$

$$\text{صً} = \text{- جـا ٢ص} \times (\text{جتـاص})^{٢}$$

<u>الأيمن :</u>

$$\text{صً}(١ + \text{س}^{٢}) = \text{- جـا ٢ص} \times \text{جتـا}^{٢}\text{ص}\ (١ + \text{ظـا}^{٢}\text{ص})$$

$$= \text{- جـا ٢ص} \times \text{جتـا}^{٢}\text{ص} \times \text{قـا}^{٢}\text{ص}$$

$$= \text{- جـا ٢ص} \times \text{جتـا}^{٢}\text{ص} \times \frac{١}{\text{جتـا}^{٢}\text{ص}} = \text{- جـا ٢ص}$$

١٢) إذا كان س = جـاص ، أثبت أن :

صً = ظـاص قـا^{٢}ص :

الحل : ١ = جتـاص × صَ

$$\text{صَ} = \frac{١}{\text{جتـاص}} = \text{قـاص} \longrightarrow \boxed{\text{صَ} = \text{قـاص}}$$

صً = قـاص ظـاص × صَ

صً = ظـاص قـا^{٢}ص

١٣) إذا كان جتـاص – س ص = ٢س ، فأثبت أن :

صً (س + جـاص) + صَ(٢ + صَ جتـاص) = ٠ :

الحل : - جـاص صَ – (س صَ + ص) = ٢

-جـاص صً + صَ × -جتـاص صَ - (س صً + صَ + صَ) = ٠

جـاص صً + جتـاص (صَ)^{٢} + س صً + ٢صَ = ٠

صً (جـاص + س) + صَ (جتـا ص × صَ + ٢) = ٠

١٤) س = ظتـا ٢ص ، أثبت أن :

صً = - صَ جـا ٤ص :

الحل : ١ = - قتـا^{٢}(٢ص) × ٢صَ

$$\text{صَ} = \frac{-١}{٢}\ \text{جـا}^{٢}(٢\text{ص})$$

$$\text{صً} = \frac{-١}{٢} \times ٢\text{جـا}(٢\text{ص}) \times \text{جتـا}(٢\text{ص}) \times ٢\text{صَ}$$

$$\text{صً} = \frac{-١}{٢}\ \text{جـا}(٤\text{ص}) \times ٢\text{صَ}$$

صً = - صَ جـا(٤ص) #

١٥) إذا كان س ص = جا س ، أثبت أن :

س صً + ٢صَ + س ص = ٠

الحل : س صَ + ص = جتا س

س صً + صَ + صَ = - جا س

س صً + ٢صَ + جا س = ٠

س صً + ٢صَ + س ص = ٠

---

١٦) إذا كان ص = $\sqrt{\text{٤ + ٣ جا س}}$ ، أثبت أن :

٢س صً + ٢(صَ)^{٢} + ص^{٢} = ٤

الحل : $\boxed{\text{ص}^{٢} \text{ = ٤ + ٣ جا س}}$

٢ ص صَ = ٣ جتا س

٢ص صً + صَ × ٢صَ = -٣جا س

٢ص صً + ٢(صَ)^{٢} + ٣جا س = ٠

٢ص صً + ٢(صَ)^{٢} + ص^{٢} - ٤ = ٠

٢ص صً + ٢(صَ)^{٢} + ص^{٢} = ٤ #

---

١٧) جا ص = ظا س ، فأثبت أن :

$$\text{ظا ص} = \frac{\text{صً}}{\text{٢قا}^{٢}\text{س} + (\text{صَ})^{٢}}$$

الحل : جتا ص × صَ = (قا س)^{٢}

جتاص×صً+صَ× - جاص×صَ = ٢(قاس)×قاس ظاس

جتاص×صً - جاص×(صَ)^{٢} = ٢(قاس)^{٢} × ظاس

جتاص×صً - جاص×(صَ)^{٢} = ٢(قاس)^{٢} × جاص

صً - ظاص×(صَ)^{٢} = ٢(قاس)^{٢} × ظاص

صً = ظاص(٢قا^{٢}س + (صَ)^{٢})

$$\text{ظا ص} = \frac{\text{صً}}{\text{٢قا}^{٢}\text{س} + (\text{صَ})^{٢}} \quad \#$$

---

١٨) إذا كان س + ص = جا ص ، أثبت أن :

(صَ)^{٢} = صً(ظتا ص - قتا ص)

الحل : ١ + صَ = جتاص × صَ

صً = جتا ص × صً + صَ × - جا ص × صَ

صً = جتا ص × صً - جا ص × (صَ)^{٢}

جا ص × (صَ)^{٢} = جتا ص × صً - صً

(صَ)^{٢} = صً(ظتا ص - قتا ص) #

---

١٩) ص – س ص = جا س ، فأثبت أن :

$$\text{صً + ص} = \frac{\text{٢صَ}}{\text{١ - س}}$$

الحل :صَ – (س صَ + ص × ١) = جتا س

صَ - س صَ - ص = جتا س

صً - (س صً + صَ) - صَ = - جا س

صً - س صً - صَ - صَ + جا س = ٠

صً - س صً - ٢صَ + ص – س ص = ٠

صً(١ – س) + ص(١ – س) = ٢صَ

$$\text{صً + ص} = \frac{\text{٢صَ}}{\text{١ - س}} \quad \#$$

الاقترانات الوسيطية :

١) إذا كان $ص = ن^{٤}$ ، $س = ٦ن + ١$ ، فجد $\left.\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right|_{ن=١}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$ (قاعدة السلسلة)

لتجد $\frac{ءن}{ءس}$ جد أولاً $\frac{ءس}{ءن}$

$\frac{ءس}{ءن} = ٦$ ومنه $\frac{ءن}{ءس} = \frac{١}{٦}$

$$\boxed{\frac{ءص}{ءس} = (٤ن^{٣}) \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٣}ن^{٣}}$$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٣ \times \frac{٢}{٣} ن^{٢} \times \frac{ءن}{ءس}$ (لأن الاشتقاق بالنسبة إلى س)

$= ٢ن^{٢} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣}ن^{٢}$

$$\boxed{\text{عندما } ن = ١ \text{ ، } \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{١}{٣}}$$

٢) إذا كان $س = جا\,٣ن$ ، $ص = جتا\,٣ن$ ، فجد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

عند $ن = \frac{\pi}{٣}$:

الحل : $\frac{ءس}{ءن} = ٣جتا(٣ن)$ ، $\frac{ءص}{ءن} = -٣جا(٣ن)$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{-٣جا(٣ن)}{٣جتا(٣ن)}$

$$\boxed{\frac{ءص}{ءس} = -\,ظا(٣ن)}$$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -\,قا^{٢}(٣ن) \times ٣ \times \frac{ءن}{ءس}$

$= -\,قا^{٢}(٣ن) \times \cancel{٣} \times \frac{١}{\cancel{٣}جتا(٣ن)}$

$$\boxed{\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -\,قا^{٣}(٣ن)}$$

$\left.\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right|_{ن=\frac{\pi}{٣}} = -\,قا^{٣}(\pi) = ١$

---

٣) $ص = ع^{٣} + ٥$ ، $ع = ٥س + ١$ ، جد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$:

الحل : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ (قاعدة السلسلة)

$= (٣ع^{٢})\,(٥) = ١٥(٥س + ١)^{٢}$

$$\boxed{\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٣٠(٥س + ١)^{١} \times ٥}$$

٤) إذا كان $ص = ع^{٢} + ٥$ ، $ع = |س|$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$:

الحل :

٥) إذا كان جا ص = س ، $|س| < ١$ أثبت

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ ، $ص \in (٠ ، \frac{\pi}{٢})$

الحل : $جتاص \frac{ءص}{ءس} = ١ \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{جتاص}$

لكن

$$\boxed{\begin{array}{l} جتا^{٢}ص = ١ - جا^{٢}ص = ١ - س^{٢} \\ جتاص = \sqrt{١ - س^{٢}} \text{ لأن } ص \in (٠ ، \frac{\pi}{٢}) \end{array}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}}$$

النهاية التي تشبه المشتقة :

* $\acute{ق}(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

* $\ddot{ق}(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\acute{ق}(س + هـ) - \acute{ق}(س)}{هـ}$

* $\acute{ق}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

* $\acute{ق}(م) = \lim_{ع \to م} \frac{ق(ع) - ق(م)}{ع - م}$

* $\ddot{ق}(م) = \lim_{ع \to م} \frac{\acute{ق}(ع) - \acute{ق}(م)}{ع - م}$

* $\lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{ق(س + هـ) - ق(س)} = \frac{١}{\acute{ق}(س)}$

* $\lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{\acute{ق}(ع) - \acute{ق}(س)} = \frac{١}{\ddot{ق}(س)}$

١) إذا كان $ق(س) = س^{٤} + ٢$ ، فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$ تساوي :

م) $٤س^{٣}$ ب) ٠ جـ) $٣س^{٤}$ ء) ١

الحل :

٢) إذا كان $\acute{ق}(س) = س(س^{٢} - ١)$ ، فإن $\lim_{ع \to س} \frac{\acute{ق}(ع) - \acute{ق}(س)}{ع - س}$ تساوي :

م) $س^{٢} + ٣س - ١$ ب) ٢س

جـ) $٢س^{٣} - س$ ء) $٣س^{٢} - ١$

الحل :

٣) إذا كان $ق(س) = س^{٤} + ٦$ ، فإن $\lim_{ع \to ١} \frac{\acute{ق}(ع) - \acute{ق}(١)}{ع - ١}$ تساوي :

م) ٤ ب) -٤ جـ) ١٢ ء) ٢٤

الحل :

٤) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، س $\neq$ ٠ ، فإن $\lim_{ع \to ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{٢ - ع}$ تساوي :

م) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{-١}{٤}$ جـ) $(٤)^{٢}$ ء) $(٤)^{-٢}$

الحل :

٥) إذا كان $ق(س) = \frac{س}{٢}$ ، فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\acute{ق}(٢ + هـ) - \acute{ق}(٢)}{هـ}$ تساوي :

م) $\frac{١}{٢}$ ب) ٤ جـ) ١ ء) ٠

الحل :

٦) إذا كان $ق^{(٢٥)}(س) = س^{٣}$ ، فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق^{(٢٧)}(٢ + هـ) - ق^{(٢٧)}(٢)}{٢هـ}$ تساوي :

م) ١٢ ب) ٦ جـ) ٣ ء) ٢٤

الحل :

٧) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ، فإن

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣)}{\text{س} - ٣}$$ تساوي :

أ) ٠ ب) ٢ جـ) ١٣ د) ٢٧

الحل :

---

٨) إذا كان $\text{ق}'(٢) = ٩$ ، فجد

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + ٤\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{٦\text{هـ}}$$ تساوي :

الحل :

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{بفرض أن } ٤\text{هـ} = \text{م} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{م}}{٤} \\ \text{عندما هـ} \leftarrow ٠ \text{ فإن م} \leftarrow ٠ \end{array}}$$

$$\therefore \text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + ٤\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{٦\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{م}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + \text{م}) - \text{ق}(٢)}{٦ \times \frac{\text{م}}{٤}}$$

$$= \frac{٢}{٣}\, \text{نهـا}_{\text{م}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + \text{م}) - \text{ق}(٢)}{\text{م}}$$

$$= \frac{٢}{٣}\, \text{ق}'(٢) = \frac{٢}{٣} \times ٩ = ٦$$

---

٩) إذا كانت $\text{ق}'(٣) = ٥$ ، جد

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣ + ٤\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}}$$:

الحل :

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{م} = ٤\text{هـ} \longleftarrow \text{هـ} = \frac{\text{م}}{٤} \\ \text{عندما هـ} \leftarrow ٠ \text{ فإن م} \leftarrow ٠ \end{array}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{م}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣ + \text{م}) - \text{ق}(٣)}{\frac{\text{م}}{٤}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{م}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣ + \text{م}) - \text{ق}(٣)}{\text{م}}$$

$$= ٤ \times \text{ق}'(٣) = ٤ \times ٥ = ٢٠$$

---

١٠) إذا كانت $\text{ق}'(٠) = -٦$ ، جد

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(٥\text{هـ})}{٢\text{هـ}}$$ تساوي :

الحل :

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{م} = ٥\,\text{هـ} \longleftarrow \text{هـ} = \frac{\text{م}}{٥} \\ \text{عندما هـ} \leftarrow ٠ \text{ فإن م} \leftarrow ٠ \end{array}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{م}\to ٠} \frac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(\text{م})}{٢ \times \frac{\text{م}}{٥}}$$

$$= \frac{-٥}{٢}\, \text{نهـا}_{\text{م}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(٠)}{\text{م}}$$

$$= \frac{-٥}{٢} \times \text{ق}'(٠) = \frac{-٥}{٢} \times -٦ = ١٥$$

---

١١) إذا كان $\text{ق}'(٤) = ٦$ ، جد

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٤ - ٢\text{هـ}) - \text{ق}(٤ + ٥\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

الحل :

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٤ - ٢\text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}} - \text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٤ + ٥\text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{\text{م} = -٢\text{هـ} \longleftarrow \text{هـ} = \frac{\text{م}}{-٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{م}\to ٠} \frac{\text{ق}(٤ + \text{م}) - \text{ق}(٤)}{\frac{\text{م}}{-٢}} = -٢\, \text{ق}'(٤)$$

$$\boxed{\text{ن} = ٥\text{هـ} \longleftarrow \text{هـ} = \frac{\text{ن}}{٥}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{ن}\to ٠} \frac{\text{ق}(٤ + \text{ن}) - \text{ق}(٤)}{\frac{\text{ن}}{٥}} = -٥\, \text{ق}'(٤)$$

$$\boxed{\begin{array}{r} -٢\, \text{ق}'(٤) - ٥\, \text{ق}'(٤) = -٧\, \text{ق}'(٤) \\ = -٧ \times ٦ = -٤٢ \end{array}}$$

١٢) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فأثبت أن :

$$\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س + ٢هـ) - ق(س - ٢هـ)}}{\text{هـ}} = \text{٤ ق}'\text{(س)}$$

الحل : البرهان : بطرح وإضافة ق(س) في البسط

$$\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س + هـ) - ق(س - ٢هـ)}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س + ٢هـ) - ق(س) + ق(س) - ق(س - ٢هـ)}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س + ٢هـ) - ق(س)}}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س) - ق(س - ٢هـ)}}{\text{هـ}}$$

* بفرض أن ل = ٢هـ $\Leftarrow$ هـ = $\frac{\text{ل}}{\text{٢}}$

عندما ل ← ٠ فإن هـ ← ٠

* بفرض أن و = -٢هـ $\Leftarrow$ هـ = $\frac{\text{-و}}{\text{٢}}$

عندما و ← ٠ فإن هـ ← ٠

$$= \underset{\text{ل}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س + ل) - ق(س)}}{\frac{\text{ل}}{\text{٢}}} + \underset{\text{و}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س) - ق(س + و)}}{\frac{\text{-و}}{\text{٢}}}$$

$$= \text{٢}\underset{\text{ل}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س +ل) - ق(س)}}{\text{ل}} + \underset{\text{و}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س + و) - ق(س)}}{\text{و}}$$

$$= \text{٢ ق}'\text{(س) + ٢ ق}'\text{(س) = ٤ ق}'\text{(س)}$$

١٣) $\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}^{٢}\text{(س + هـ) - جا}^{٢}\text{(س)}}{\text{هـ}}$ تساوي :

الحل : ق(س) = جا^{٢}س

ق$'$(س) = ٢ جاس جتاس = جا ٢س

١٤) $\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{(س + هـ)}^{٣}\text{ - س}^{٣}}{\text{هـ}}$ تساوي :

الحل : ق(س) = س^{٣}

ق$'$(س) = ٣س^{٢}

١٥) $\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{(٢ + هـ)}^{٥}\text{ - ٣٢}}{\text{هـ}}$:

الحل : = $\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{(٢ + هـ)}^{٥}\text{ - (٢)}^{٥}}{\text{هـ}}$ تساوي :

ق(س) = س^{٥}

ق$'$(س) = ٥س^{٤}

ق$'$(٢) = ٥ × ١٦ = ٨٠

١٦) $\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٧(١ + هـ)}^{٨}\text{ - ٧}}{\text{هـ}}$:

الحل : = $\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٧(١ + هـ)}^{٨}\text{ - ٧(١)}^{٨}}{\text{هـ}}$

ق(س) = ٧س^{٨}

ق$'$(س) = ٥٦س^{٧}

ق$'$(١) = ٥٦

١٧) إذا كان ق(٠) = ٨ ، ق$'$(٠) = ٣ ، جد

$$\underset{\text{س}\to \text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(جتا }\frac{\pi}{\text{س}}\text{) - ٨}}{\text{س - ٢}} :$$

الحل : $= \underset{\text{س}\to \text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(جتا }\frac{\pi}{\text{س}}\text{) - ق(جتا }\frac{\pi}{\text{٢}}\text{)}}{\text{س - ٢}}$

$$= \text{ق}'\text{(جتا }\frac{\pi}{\text{٢}}\text{)} \times \text{-جا}\frac{\pi}{\text{٢}} \times \frac{-\pi}{\text{٤}}$$

$$= \text{ق}'\text{(٠)} \times \text{-١} \times \frac{-\pi}{\text{٤}} = \frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}$$

*** إثبات النظريات للوحدة الثانية :**

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$ ، أثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر}$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{جـ} - \text{جـ}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{٠}{\text{ع} - \text{س}} = ٠$

٢) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{ق}(\text{س})$ ، أثبت أن $\text{د}'(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{ق}'(\text{س})$ حيث جـ ثابت :

الحل : $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{جـ}\,\text{ق}(\text{ع}) - \text{جـ}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{جـ} \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{جـ}\,\text{ق}'(\text{س})$

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})$ ، أثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{س}) + \text{هـ}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ل}(\text{ع}) + \text{هـ}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{ل}'(\text{س}) + \text{هـ}'(\text{س})$

٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{أ}}{\text{م}(\text{س})}$ ، $\text{م}(\text{س}) \neq ٠$ ، أثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-\text{أ}\,\text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$:

الحل : باستخدام قاعدة القسمة

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{م}(\text{س}) \times ٠ - \text{أ} \times \text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$

$= \dfrac{-\text{أ} \times \text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$

٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، ن عدد موجب أثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}^{\text{ن}-١} + \text{ع}^{\text{ن}-٢}\times\text{س}^{١} + \text{ع}^{\text{ن}-٣}\times\text{س}^{٢} + ... + \text{س}^{\text{ن}-١})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{س}^{\text{ن}-١} + \text{س}^{\text{ن}-١} + ... + \text{س}^{\text{ن}-١} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، ن عدد صحيح سالب أثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$:

الحل : نفرض أن $\text{ن} = -\text{م}$ ، م صحيح موجب

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-\text{م}} = \dfrac{١}{\text{س}^{\text{م}}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-١ \times \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}}{(\text{س}^{\text{م}})^{٢}} = \dfrac{-\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}}{\text{س}^{٢\text{م}}}$

$= -\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١-٢\text{م}} = -\text{م}\,\text{س}^{-\text{م}-١} = -\text{م}\,\text{س}^{\text{ن}-١} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

٧) إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ ، $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}}$ عدد نسبي أثبت أن $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}-١}$:

الحل : $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ ، $\text{ص}^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن}}$ (نرفع للقوة م)

$\text{م}\,\text{ص}^{\text{م}-١} \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{س}^{\text{ن}-١})$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}}{\text{م}\,\text{ص}^{\text{م}-١}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{م}} \cdot \dfrac{\text{س}^{\text{ن}-١}}{(\text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}})^{\text{م}-١}}$

$= \dfrac{\text{ن}}{\text{م}} \cdot \dfrac{\text{س}^{\text{ن}-١}}{\text{س}^{\text{ن}-\frac{\text{ن}}{\text{م}}}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{س}^{\text{ن}-١-\text{ن}+\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

$= \dfrac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}-١}$

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ قابلاً للاشتقاق عند $\text{س} = \text{س}_1$ ، أثبت أنه يكون متصلاً عند $\text{س} = \text{س}_1$:

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1) = \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س} - \text{س}_1} \times (\text{س} - \text{س}_1)\text{، } \text{س} \neq \text{س}_1$$

$\Longleftarrow$ بأخذ النهاية للطرفين : (عند $\text{س} \leftarrow \text{س}_1$)

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهــا}} (\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1))$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س} - \text{س}_1} \times \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهــا}} (\text{س} \times \text{س}_1)$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) - \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}_1) = \text{ق}'(\text{س}_1) \times ٠$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1) = ٠$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}_1)$$

$\therefore$ $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند س_1 لأن النهاية = الصورة

* حصاد التفاضل :

* مقدار التغير في السينات : Δ س = هـ

Δ س = س$_2$ − س$_1$

* مقدار التغير في الاقتران : Δ ص

Δ ص = ص$_2$ − ص$_1$

Δ ق(س) = ق(س$_2$) − ق(س$_1$)

$\boxed{\Delta \text{ ق(س)} = \text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}$

تستخدم إذا لم تعطى قيم س أو إذا أعطيت قيم (Δ س ، هـ)

* معدل التغير : $\dfrac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$

* أسماء أخرى لمعدل التغير : (ميل القاطع = $\dfrac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$)

* السرعة المتوسطة = $\dfrac{\Delta \text{ ف}}{\Delta \text{ ن}} = \dfrac{\text{ف(ن}_2) - \text{ف(ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$

إذا لم تعطى قيم س وعرفت (هـ = Δ س) فإن معدل التغير يساوي : $\dfrac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \dfrac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$

* ملاحظات هامة :

١. معدل التغير للثابت = صفر
٢. معدل التغير للخطي = معامل س
٣. معدل التغير يتوزع على الجمع والطرح فقط
٤. أي شيء خارج الملاحظات على الأصل دوَر

* تعريف المشتقة الأولى :

ق'(س) = نهـــا معدل التغير

ق'(س) = $\underset{\Delta \text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \dfrac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$

Δ س = Δ س
Δ س = هـ
Δ س = ع - س

ق'(س) = $\dfrac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$

ق'(س) = $\underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$ ....هام

* قواعد الاشتقاق :

① مشتقة الثابت = صفر

② مشتقة ؏س = ؏

③ مشتقة ؏س^{ن} = ؏ × ن س$^{ن-1}$

④ مشتقة جمع وطرح الاقترانات (دون خوف)

ق(س) = هـ(س) + ل(س) – ع(س)

ق'(س) = هـ'(س) + ل'(س) – ع'(س)

⑤ مشتقة ضرب اقترانين : ق ٠ هـ

(الأول يبقى) (نشتق الثاني) + (الثاني يبقى) (نشتق الأول)

ق(س) × هـ'(س) + هـ (س) × ق'(س)

⑥ مشتقة قسمة اقترانين :

؏) $\dfrac{\text{بسط}}{\text{مقام}} \Leftarrow \dfrac{\text{(مشتقة البسط × المقام) - (مشتقة المقام × البسط)}}{\text{(المقام)}^2}$

ب) $\dfrac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}} \Leftarrow \dfrac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت}}$

جـ) $\dfrac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}} \Leftarrow \dfrac{\text{- الثابت × مشتقة الاقتران}}{\text{(الاقتران)}^2}$

⑦ مشتقة (اقتران)$^{\text{قوة}}$:

(هـ(س))^{ن} ⟵ ن (هـ(س))$^{ن-1}$ × هـ'(س))

ننزل القوة الحشوة كما هي (القوة – ١) × المشتقة الحشوة

⑧ الجذور رمز الجذور التربيعية تقود إلى أصلها

$\sqrt[ج]{(\quad)^{ن}} = (\quad)^{\frac{ن}{ج}}$

⑨ مشتقة الجذر التربيعي : $\dfrac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \sqrt{\text{نفسه}}}$

⑩ ثابت × اقتران ⟸ الثابت × مشتقة الاقتران

(٥ هـ(س) ⟵ ٥ هـ'(س))

($\frac{1}{2}$ ل(س) ⟵ $\frac{1}{2}$ ل'(س))

* لا تنسى دائماً :

نفك $\xrightarrow{\text{ثم}}$ نشتق

ق^{٢}(س) ⟵ (ق(س))^{٢} ⟵ ٢(ق(س))^{١} × قَ(س))

هـ^{٣}(س) ⟵ (هـ(س))^{٣} ⟵ ٣(هـ(س))^{٢} × هـَ(س))

هـ^{ن}(س) ⟵ (هـ(س))^{ن} ⟵ ن(هـ(س))$^{ن-١}$ × هـَ(س))

١١. مشتقة الاقترانات الدائرية :

١) جا(هـ(س)) ⟵ جتا(هـ(س)) × هـَ(س)

٢) جتا(هـ(س)) ⟵ -جا(هـ(س)) × هـَ(س)

٣) ظا(هـ(س)) ⟵ قا^{٢}(هـ(س)) × هـَ(س)

٤) ظتا(هـ(س)) ⟵ - قتا^{٢}(هـ(س)) × هـَ(س)

٥) قا(هـ(س)) ⟵ قا(هـ(س)) ظا(هـ(س)) × هـَ(س)

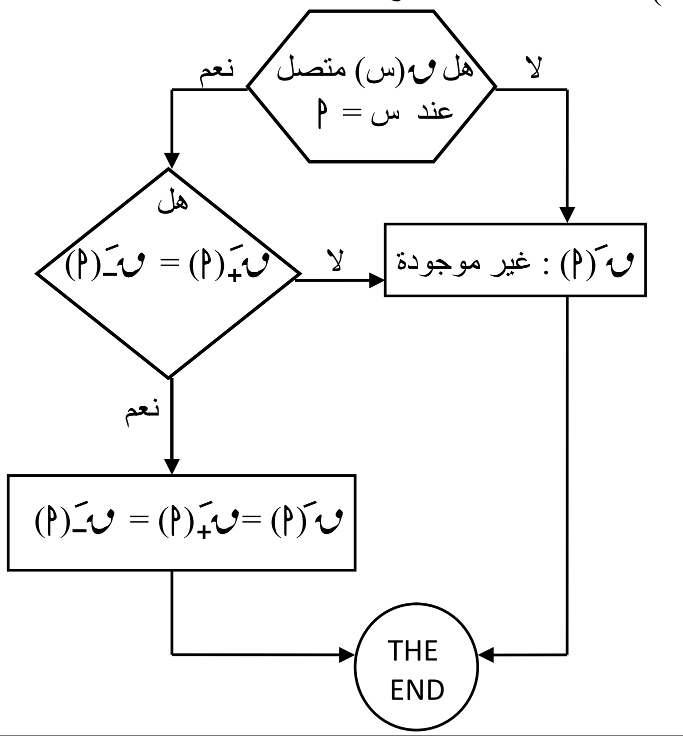
٦) قتا(هـ(س)) ⟵ -قتا(هـ(س)) ظتا(هـ(س)) × هـَ(س)

مشتقة الاقتران المتشعب :

١) نشتق كل قاعدة على حدي ثم نزيل إشارة المساواة عند الفترات (المتباينات) .

٢) المشتقة عند الأطراف غير موجودة .

٣) المشتقة عند نقاط التحول :



* سيناريو المطلق والأكبر عدد صحيح :

١ قَ(س) نعيد التعريف الكامل .

٢ قَ(م)

١. المجموعة الأولى : الاتصال

ق(م) =

نهـا$_{س \to م}$ ق(س) =

تم

٢. المجموعة الثانية : الاشتقاق

قَ$_{+}$(م) =

قَ$_{-}$(م) =

٣ قَ(م)

وحيد ، دوائر فقط

* المطلق : نعوض فيه فإذا كان :

١. ناتج التعويض موجب ننزل الحشوة ثم نشتق .

٢. ناتج التعويض سالب ننزل عكس الإشارة ثم نشتق.

٣. صفر : غير موجودة .

٤. الصحيح :
- صحيح ⟵ المشتقة غير موجودة
- كسر ⟵ المشتقة صفر

* المشتقات العليا :

قَ(س) = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ق$^{(١)}$(س) = المشتقة الأولى

قً(س) = $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ق$^{(٢)}$(س) = المشتقة الثانية

قَََ(س) = $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ = ق$^{(٣)}$(س) = المشتقة الثالثة

قًً(س) = $\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}}$ = ق$^{(٤)}$(س) = المشتقة الرابعة

* ق(س) ⟵ قَ(س) ⟵ قً(س) ⟵ قَََ(س) ⟵ ق$^{(٤)}$(س)

* ق$^{(٩)}$(س) ⟵ ق$^{(١٠)}$(س)

ملاحظات :

* كلمة أصفار : تعني جيب التي بعدها وساويها بالصفر .
* أصفار المشتقة الأولى $\longleftarrow$ $\text{ق}'(\text{س}) = ٠$
* أصفار $\text{ق}(\text{س})$ $\longleftarrow$ $\text{ق}(\text{س}) = ٠$
* صفر ، حل ،وجذر تعامل نفس المعاملة .

*** الإثبات :**

١) الطرف الأيمن $\longleftarrow$ الطرف الأيسر

الطرف الأيسر $\longleftarrow$ الطرف الأيمن

الطرف الأيمن
الطرف الأيسر } مقدار نفسه

نبدأ بالطرف الذي فيه مشتقات ثم نميز مقاديره ثم نبدأ بعملية التجميع .

*** النهاية التي تشبه المشتقة : (مشتقة ما بعد السالب)**

$$\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{ق}'(\text{س})$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(\text{أ})}{\text{أ} - \text{س}} = - \text{ق}''(\text{أ})$$

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{أ هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\, \text{ق}'(\text{س})$$

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{ب} + \text{هـ})}{\text{هـ}} = - \text{ق}'(\text{ب})$$

حذاري من التعويض المباشر أولاً ثم القاعدة وحذاري من الترتيب

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{ب})}{\text{س} - \text{ب}} = \text{تعويض مباشر}$$

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢ - \text{هـ})^{٥} - ٣٢}{\text{هـ}}$$ استخدم هوبيتال (دوائر)

$$= \frac{٥(٢ - \text{هـ})^{٤} \times -١ - ٠}{١} = -٥ \times ١٦ = -٨٠$$

* إذا تم لمح هـ فإننا نشتم رائحة المشتقة الأولى .
* إذا وجد مقدارين بـ هـ نطرح ونضيف .

قاعدة السلسلة :

ص $\Longleftarrow$ ع $\Longleftarrow$ س

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} =$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} =$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ (انتبه للكسر الأصلي)

مشتقة (فلاح) بالنسبة لـ(محمد)

ص = (فلاح) ، ع = محمد

نجد $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\quad} \times \frac{\quad}{\text{دع}}$

*** أثبت باستخدام السلسلة :**

نفرض ع = تحت القوة ، تحت الجذر ، الزاوية

هام : يجب أن نميز بين :

$\text{ق}^{(٢)}(\text{س})$ $\xleftarrow{\text{نشتق}}$ $\text{ق}^{(٣)}(\text{س})$

$\text{ق}^{٢}(\text{س})$ $\xleftarrow{\text{نجهز نفك}}$ $(\text{ق}(\text{س}))^{٢}$ $\longleftarrow$ $٢(\text{ق}(\text{س})) \times \text{ق}'(\text{س})$

$\text{ق}(\text{س}^{٢})$ $\longleftarrow$ $\text{ق}'(\text{س}^{٢}) \times ٢\text{س}$ $\longleftarrow$ لا تنسى

*** الاشتقاق الضمني :** عندما نشتق ص نضع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$ $\longleftarrow$ $٢\text{س} + ٢\text{ص}\, \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\text{س}^{٢} \times \text{ص}^{٣}$ $\longleftarrow$ $\text{س}^{٢} \times ٣\text{ص}^{٢}\, \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}^{٣} \times ٢\text{س}$

لإيجاد المشتقة الثانية الضمنية نجد المشتقة الأولى $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ثم نشتق مرة أخرى ثم نعوض مكان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فيها .

* انتبه في بعض الإثبات الضمني وذلك في الاشتقاق مرتين دون وجود وإيجاد صَ أولاً وهذه الحالة منطبقة على الضرب والجذور

* مشتقة التركيب : (ق o هـ) (س)

(ق o هـ) (س) = ق (هـ(س))

(ق o هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

(هـَ o قَ)ً(م) = هـً(ق(م)) × قَ(م)

أولاً نجهز المتوقعات لـ ق ، هـ في عدد المشتقات ثم نبدأ بالحل

(ق o هـَ)ً(م)

نجد المشتقة الأولى فقط : قَ(هـَ(م)) × هـً(م)

نجد المشتقة الثانية حاصل ضرب ثم نعوض .

قَ(هـَ(م)) × هـًّ(م) + هـً(م)) × قً(هـَ(م)) × هـً(م)

ص = ٣ع^{٢} + ٢ع   وع تعتمد على س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ٦ع + ٢

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ع $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ + ٢ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ن + ٥ ،   ن تعتمد على س

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٤ $\frac{\text{ءن}}{\text{ءس}}$